

SPHÄRISCHE FINITE ELEMENTE UND
IHRE ANWENDUNG AUF EIGENWERTPROBLEME
DES LAPLACE-BELTRAMI-OPERATORS

LORENZ KARL STEGER

Dass
München
1984

Digitized by the Internet Archive
in 2026

SPHÄRISCHE FINITE ELEMENTE UND IHRE ANWENDUNG AUF
EIGENWERTPROBLEME DES LAPLACE-BELTRAMI-OPERATORS

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

LORENZ KARL STEGER

aus Regensburg

eingereicht am 21.12.1983

1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Kalf

Tag der mündlichen Prüfung: 3.5.1984

Herstellung: Hieronymus Buchreproduktions GmbH, München

INHALT

EINLEITUNG

A.	Einleitende Bemerkungen und Problemstellung	1
B.	Zusammenfassung	7
C.	Vereinbarungen	10
I.	EIGENWERTPROBLEME FÜR DEN LAPLACE-BELTRAMI-OPERATOR	
1.	Schwache Formulierung des Eigenwertproblems	15
2.	Rayleigh-Ritz-Verfahren	25
II.	KONSTRUKTION DER ANSATZRÄUME	
3.	Finite Elemente auf Flächen	29
4.	Finite Elemente auf der 2-Sphäre	42
III.	KONVERGENZTHEORIE	
5.	(k, α) -reguläre Funktionen	58
6.	Hilfssätze	69
7.	Abschätzung des Approximationsfehlers	76
IV.	NUMERISCHE DURCHFÜHRUNG	
8.	Allgemeines Konzept	96
9.	Berechnung der lokalen Gleichungssysteme	106
10.	Numerische Ergebnisse	122

LITERATUR

Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen: $1, 2, \dots$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}^{m,n}$	reelle Matrizen mit m Zeilen und n Spalten
$x \cdot y$	$x \in \mathbb{R}^{m,k}, y \in \mathbb{R}^{k,n}$: Matrix-Multiplikation
$x \times y$	$x, y \in \mathbb{R}^3$: Vektorprodukt
$\ \cdot\ $	euklidische Norm, vgl. C, S.10
e_i	Einheitsvektoren
E	abgeschlossenes Einheitsdreieck im $\mathbb{R}^2$
a_1, a_2, a_3	Eckpunkte von E
$K(x, r)$	offene Kugel um x mit Radius r
$\delta_{x,y}$	Kronecker-Symbol
$C^k(G)$	k -mal stetig differenzierbare Funktionen, $G \subset \mathbb{R}^n$
$D^k u$	k -te Fréchet-Ableitung
$D^\alpha u$	partielle Ableitung zum Multiindex α
$D_i u$	partielle Ableitung nach dem i -ten Argument
$C^k(\bar{G})$	$\{u \in C^k(G) \mid D^\alpha u \text{ stetig auf } \bar{G} \text{ fortsetzbar, } \alpha \leq k\}$
$C^\infty_c(G)$	beliebig oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger in G
$\text{trg } u$	Träger von u
$H^k(G)$	Sobolew-Raum über $G \subset \mathbb{R}^2$, vgl. C, S.10
$\ \cdot\ _{k,G}$	Sobolew-Norm, vgl. C, S.10
$ \cdot _{k,G}$	Sobolew-Halbnorm, vgl. C, S.10
(g_{ij})	kovariante 1. Fundamentalform, vgl. C, S.12
(g^{ij})	kontravariante 1. Fundamentalform, vgl. C, S.12
g	$\det(g_{ij})$, Flächenelement

S^2	2-dimensionale Sphäre
$d_S(x,y)$	$x,y \in S^2$, sphärischer Abstand, vgl. C, S.13
$K_S(x,r)$	$\{y \in S^2 \mid d_S(x,y) < r\}$, $x \in S^2$
$C^k(S)$	k-mal stetig diff'bare Funktionen auf der Fläche S, vgl. C, S.12
$H^k(S)$	Sobolew-Raum auf der Fläche S, vgl. C, S.13
H_R^1	$H^1(S)$ mit Randbedingungen, vgl. Def. 1.3
$R = (P,L,H)$	Referenz-Element, vgl. Def. 3.1
$L(K), H(K)$	vgl. Satz 6.3
$d_G(K)$	gnomonischer Durchmesser von $K \subset S^2$, vgl. Def. 4.8
$\rho_G(K)$	gnomonischer Inkreisradius von $K \subset S^2$, vgl. Def. 4.8
h_K	sphärischer Durchmesser von $K \subset S^2$, vgl. 4.4(b), S.46
$\sigma_D, \sigma_x, \sigma_i$	stereografische Projektionen, vgl. Def. 1.1 bzw. S. 58 bzw. (N)
γ_D, γ_K	gnomonische Projektionen, vgl. Def. 4.1 bzw. 4.3
X_S	singuläre Punkte, vgl. S.16
$\alpha(x)$	$x \in X_S$, singulärer Exponent, vgl. Def. 5.3
α_O	$\min \{\alpha(x) \mid x \in X_S\}$
T, T_h	Triangulierungen, vgl. Def. 3.3 bzw. S.76
Δ	Laplace-Beltrami-Operator, S.15

Abkürzungen

(AEWP)	Abstraktes Eigenwertproblem, S.14
(AS)	Aufgabenstellung, S.15
(EWP)	Eigenwertproblem, S.16
(N)	Normierung, S.19
(SEWP)	Schwaches Eigenwertproblem, S.22

A. Einleitende Bemerkungen und Problemstellung

Die Lösungen elliptischer Randwertaufgaben weisen in der Umgebung von Randpunkten des Grundgebietes, an denen das Gebiet nicht glatt berandet ist, singuläres Verhalten auf. Die partiellen Ableitungen der Lösung sind von einer bestimmten Ordnung an, die von der Geometrie des Randes in der Umgebung des singulären Randpunktes abhängt, nicht mehr quadratisch integrierbar. Bei der Untersuchung dieses Phänomens ist es in der Literatur (z.B. Grisvard [76]) üblich, von dem Standardproblem

$$-\Delta v = f$$

mit geeigneten Randbedingungen auf Polyedergebieten auszugehen. Durch Anwendung der Fortsetzungsmethode können die Ergebnisse für das Standardproblem zum Teil auf allgemeine elliptische Operatoren 2.Ordnung mit variablen Koeffizienten übertragen werden.

Das singuläre Verhalten der Lösung v an den singulären Randpunkten ist bei hinreichend glatter rechter Seite f bestimmend für die Konvergenzordnung numerischer Verfahren zur näherungsweisen Lösung des Randwertproblems. Von zentraler Bedeutung ist dabei die Klärung der Frage, für welche $p \in [2, \infty)$ gewisse höhere Ableitungen von v noch im p -ten Mittel integrierbar sind. Ist die Aufgabe z.B. mit homogenen Randbedingungen im $\mathbb{R}^n$ gestellt, so ist für das Ritz-Verfahren mit linearen Finiten Elementen als Ansatzfunktionen die Konvergenzordnung bezüglich der Energienorm durch $1 - \frac{n}{p}$ beschränkt, falls die

ersten Ableitungen von v nicht im p -ten Mittel integrierbar sind (Ciarlet [78]).

Für den Fall, daß das Grundgebiet G ein beschränktes Polygongebiet im $\mathbb{R}^2$ ist, liegen genaue Angaben über das singuläre Verhalten von v vor. Ist x_0 eine Ecke des Randes ∂G , auf dem die Dirichletsche Randbedingung $v|_{\partial G}=0$ gestellt ist, und $\alpha\pi$ der Innenwinkel bei x_0 , so gilt in einer Umgebung von x_0 die Darstellung von v in Polarkoordinaten:

$$v(r, \varphi) = \begin{cases} c r^{1/\alpha} \sin \varphi / \alpha + O(r^{2/\alpha}) & , \alpha^{-1} \notin \mathbb{N} \\ c r^{1/\alpha} \ln r \sin \varphi / \alpha + O(r^{2/\alpha} \ln r) & , \alpha^{-1} \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

Diese Gleichung darf formal differenziert werden. Für Neumannsche oder gemischte Randbedingungen gelten ähnliche Aussagen (Lehman [59], Wigley [64]).

Ist das Grundgebiet G ein Polyedergebiet im $\mathbb{R}^3$, so ist die Menge der singulären Randpunkte nicht mehr endlich. In den Arbeiten von Kellogg [71], Grisvard [75], [76], Fichera [75], [78] und Stephan/Whiteman [81] wird gezeigt, daß der Einfluß der singulären Randpunkte auf das Verhalten der Lösung am Rande in Kanten- und Eckensingularitäten aufgespalten werden kann. Die Kantensingularitäten sind bestimmt durch den Innenwinkel, den die in der Kante sich schneidenden Berandungsflächen bilden, und den Randbedingungen auf den Berandungsflächen. Das singuläre Verhalten der Lösung v an einer Ecke x_0 wird bis auf Terme höherer Ordnung in r beschrieben durch

$$s(x) = c r^{(\sqrt{1+4\lambda_1} - 1)/2} u_1(\omega) ,$$

$$r := \|x - x_0\|, \quad \omega := (x - x_0) / \|x - x_0\|, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist λ_1 der kleinste Eigenwert größer null und u_1 eine zugehörige Eigenfunktion des Eigenwertproblems

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

für den Laplace-Beltrami-Operator Δ über dem Teilgebiet

$$S := \{ \omega \in S^2 \mid \exists R > 0 : x_0 + r\omega \in G, \quad 0 < r < R \}$$

der Sphäre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Die Randbedingungen an u sind derart festzulegen, daß $s(x)$ die Randbedingungen des Randwertproblems erfüllt.

Der Laplace-Beltrami-Operator ist definiert durch die lokale Darstellung

$$(\Delta u) \circ p := \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^2 D_i \left(\sqrt{g} \sum_{j=1}^2 g^{ij} D_j (u \circ p) \right)$$

für jede lokale Parametrisierung p von S .

Dabei ist $(g^{ij})_{i,j=1}^2$ die kontravariante Darstellung der ersten Fundamentalform und $\sqrt{g}$ das Flächenelement bzgl. p (Definitionen der geometrischen Begriffe sind in Abschnitt C zusammengefaßt).

Neben singulären Randpunkten sind Unstetigkeiten der Koeffizienten eine weitere Ursache für Singularitäten bei Lösungen elliptischer Randwertaufgaben. Als Standardproblem werde das folgende Interface-Problem über einem Polyedergebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ betrachtet. Es sei G zerlegt in die Polyedergebiete G_1, G_2 und $p_1, p_2 > 0$; gesucht ist eine Funktion v derart, daß für $v_i := v|_{G_i}$, $i = 1, 2$, gilt:

$$-p_1 \Delta v_1 = f \quad \text{in } G_1, \quad -p_2 \Delta v_2 = f \quad \text{in } G_2,$$

$$v_1 = v_2, \quad p_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} = p_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} \quad \text{auf } \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2;$$

auf $(\partial G_1 \cup \partial G_2) \setminus (\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2)$ erfülle v Dirichletsche oder Neumannsche Randbedingungen. Das singuläre Verhalten der Lösung v an einer gemeinsamen Ecke x_0 von $\partial G_1, \partial G_2$ wird nach Kellogg [71] bis auf Terme höherer Ordnung in r wiederum beschrieben durch die Funktion $s(x)$.

Dabei ist λ_1 nun der kleinste Eigenwert größer null und u_1 eine zugehörige Eigenfunktion des Eigenwertproblems

$$p_1 \Delta u + p_1 \lambda u = 0 \quad \text{in } S_1, \quad p_2 \Delta u + p_2 \lambda u = 0 \quad \text{in } S_2$$

mit $S_i := \{\omega \in S^2 \mid \exists R > 0 : x_0 + r\omega \in G_i, 0 < r < R\}, i = 1, 2$.

An u_1 sind Übergangsbedingungen auf $\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ und Randbedingungen zu stellen, so daß $s(x)$ in einer Umgebung von x_0 den Forderungen an eine Lösung des Interface-Problems genügt.

Diese Ergebnisse bleiben gültig für den Fall, daß G in $M > 2$ Teilgebiete $G_i, 1 \leq i \leq M$, mit Gewichten p_i zerlegt ist. Die lokale Regularitätsuntersuchung der Lösung v an den Ecken der Teilgebiete G_i führt dann auf die Eigenwertaufgabe:

(EWP) Es sei $S \subset S^2$ ein Polygongebiet oder $S = S^2$.

S sei in $M \in \mathbb{N}$ echte Polygongebiete $S_i, 1 \leq i \leq M$, zerlegt. Jedem $S_i, 1 \leq i \leq M$, sei ein $p_i > 0$ zugeordnet. Der Rand ∂S sei zerlegt in $\partial S_D, \partial S_N$. Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{R}, u: S \rightarrow \mathbb{R}, u \neq 0$, so daß mit $u_i := u|_{S_i}$ gilt:

$$p_i \Delta u_i + p_i \lambda u_i = 0 \quad \text{auf } S_i, \quad 1 \leq i \leq M,$$

$$u_i = u_j, \quad p_i \frac{\partial u_i}{\partial n} = p_j \frac{\partial u_j}{\partial n} \quad \text{auf } \bar{S}_i \cap \bar{S}_j,$$

$$u|_{\partial S_D} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial S_N} = 0.$$

Die numerische Lösung von (EWP) wurde in der Literatur bisher nur für Spezialfälle untersucht. Walden, Kellogg [77] betrachten als Grundgebiete S sphärische Dreiecke. Durch die Einführung von Polarkoordinaten führen sie das Eigenwertproblem (EWP) auf ein Eigenwertproblem über einem ebenen Grundgebiet zurück, das dann durch ein Differenzen-Verfahren diskretisiert wird. Die Verwendung von Polarkoordinaten erfordert Maßnahmen gegen den Einfluß der Polstellen.

In Fichera [75] wird der Fall der "7/8-Kugel"

$$S_{7/8} := S^2 \setminus \{x \in S^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0\}$$

mit Dirichletschen Randbedingungen $\partial S_D = \partial S_{7/8}$ betrachtet. Fichera parametrisiert $S_{7/8}$ durch eine inverse stereografische Projektion (vgl. Definition 1.1). Für das Eigenwertproblem über dem Parametergebiet berechnet Fichera mit dem Rayleigh-Ritz-Verfahren und einem Finite-Element-Raum als Ansatzraum eine obere Schranke für den kleinsten Eigenwert. Eine untere Schranke leitet Fichera aus dem Faber-Krahn-Prinzip ab: "unter allen Membranen gleicher Fläche besitzt die kreisförmige den tiefsten Grundton". Fichera erhält die Schranken:

$$0.62153 < \lambda_1 < 0.68025.$$

Den Lösungsansätzen in beiden Arbeiten ist gemeinsam, daß sie das Problem durch globale Parametrisierung des Grundgebietes S in eine Eigenwertaufgabe über einem ebenen Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ transformieren. Hieraus ergeben sich zwei Schwierigkeiten. Durch die globale Parametrisierung geht die Eigenschaft von S verloren, polygonal berandet zu sein. Die Parametergebiete sind sowohl für die stereografische Projektion wie für Polarkoordinaten durch endlich viele, i.a. nicht geradlinige C^∞ -Kurvenstücke berandet. Versucht man Verfahren hoher Konvergenzordnung einzusetzen, die sich in Verbindung mit Vorkehrungen gegen den Einfluß der endlich vielen singulären Randpunkte, wie lokale Verfeinerungen oder "singuläre Funktionen", bei elliptischen Eigenwertproblemen auf polygonalen Gebieten im $\mathbb{R}^2$ bewährt haben (Strang/Fix [73]), so erfordert die nicht-geradlinige Berandung eine Approximation des Randes, etwa durch isoparametrische Elemente, die einen beträchtlichen numerischen Aufwand zur Folge haben. Liegen die Approximationen des Randes nicht vollständig im Parametergebiet, so geht zusätzlich die monotone Konvergenz der Eigenwerte verloren, wie sie etwa bei einem konformen Rayleigh-Ritz-Verfahren gegeben ist. Eine weitere Schwierigkeit, die sich bei globaler Parametrisierung ergibt, entsteht im Fall, daß das Grundgebiet S gleich der ganzen Sphäre S^2 ist. Die Verwendung globaler Parametrisierungen erzwingt dann die Einführung von Polstellen, d.h. von Singularitäten, die ausschließlich auf die Parametrisierung zurückzuführen sind und durch das

ursprüngliche Problem (EWP) nicht gerechtfertigt sind.

B. Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Schwierigkeiten, die bei globaler Parametrisierung des Grundgebietes auftreten, durch Übertragung des Finite-Element-Konzepts auf die Sphäre S^2 zu vermeiden. Durch Konstruktion von Finiten Elementen, die mit der Geometrie der Sphäre S^2 verträglich sind, d.h. deren Definitionsbereiche sphärische Dreiecke sind, wird die Anwendung des konformen Rayleigh-Ritz-Verfahrens mit Ansatzräumen beliebig hoher Approximationsordnung auf das Eigenwertproblem (EWP) ermöglicht. Die effiziente numerische Durchführbarkeit wird gewährleistet durch die Angabe von Rekursionsformeln zur Berechnung der Matrizen, die im diskretisierten Eigenwertproblem auftreten.

In Abschnitt 1 wird eine Formulierung von (EWP) als Variationsaufgabe gegeben und der Begriff der schwachen Lösung definiert. Bis auf die Definition der Normen auf den Sobolew-Räumen über S , die auf die Beweisführung in Kapitel III zugeschnitten ist, folgen die Ausführungen dem Beispiel des klassischen Dirichlet-Problems. In Abschnitt 2 wird das Rayleigh-Ritz-Verfahren für das schwache Eigenwertproblem kurz dargestellt.

Die Konstruktion von Finite-Element-Räumen auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ ist Gegenstand von Kapitel II. In Abschnitt 3 stellen wir ein abstraktes Konzept für Finite Elemente auf beliebigen

Flächen vor. Diesem Konzept liegt der Gedanke zugrunde, statt der affinen Koordinatentransformationen wie bei den klassischen Finiten Elementen und der komponentenweise polynomialen Koordinatentransformationen wie bei den isoparametrischen Elementen beliebige reguläre Koordinatentransformationen zuzulassen. In Abschnitt 4 wenden wir dieses Konzept auf sphärische Flächen an. Es erweist sich dabei als hinreichend konkret, um als Leitlinie bei der Suche nach geeigneten Parametrisierungen zu dienen. In Satz 4.9 geben wir eine Abschätzung des Interpolationsfehlers an.

In Kapitel III untersuchen wir die Approximationseigenschaften der sphärischen Finiten Elemente. In Abschnitt 5 definieren wir den Begriff der (k, α) -regulären Funktion, der die für die Abschätzung des Approximationsfehlers relevanten Eigenschaften der Eigenfunktionen von (EWF) zusammenfaßt. Mit Hilfe der stereografischen Projektion führen wir in Satz 5.5 die Untersuchung der lokalen Regularitätseigenschaften auf die in der Literatur untersuchten lokalen Regularitätseigenschaften der Lösungen von Randwertproblemen zum Δ -Operator auf ebenen Gebieten zurück. Abschnitt 6 stellt einige Hilfssätze für die Abschätzung des Approximationsfehlers in Abschnitt 7 bereit. Die Abschätzung des Approximationsfehlers wird in Satz 7.2 für quasi-uniforme Triangulierungen und in Satz 7.4 für verfeinerte Triangulierungen gegeben. Beim Beweis werden Beweisideen aus Veidinger [74] und Schatz/Wahlbin [79] herangezogen. Da der

Fehler des Rayleigh-Ritz-Verfahrens durch den Approximationsfehler abgeschätzt werden kann, erhalten wir Fehlerabschätzungen für das Rayleigh-Ritz-Verfahren mit den in Kapitel II konstruierten Ansatzräumen.

In Kapitel IV behandeln wir die numerische Durchführung des Rayleigh-Ritz-Verfahrens mit sphärischen Finiten Elementen. Das diskretisierte Eigenwertproblem ist äquivalent zu einem verallgemeinerten Eigenwertproblem der linearen Algebra:

$Ax = \lambda Bx$. In Abschnitt 8 führen wir die Berechnung der Matrizen A, B auf die Auswertung algebraischer Integrale über dem Einheitsdreieck zurück. In Abschnitt 9 geben wir Rekursionsformeln an, die zur effizienten Berechnung dieser Integrale verwendet werden können. Alle auftretenden Integrale können analytisch ausgewertet werden; es ist keine numerische Integration nötig. Schließlich zeigen wir in Abschnitt 10 an numerischen Beispielen, daß das Konvergenzverhalten des Verfahrens bereits bei sehr groben Triangulierungen dem asymptotischen Konvergenzverhalten entspricht, das in Kapitel III bewiesen worden ist. Mit relativ geringem Aufwand an Rechenzeit können wir die obere Schranke von Fichera für den kleinsten Eigenwert λ_1 der $7/8$ -Kugel verbessern zu: $\lambda_1 < 0.66046$. Die Rechnungen lassen im übrigen die Annahme zu, daß die ersten vier Ziffern in der Dezimaldarstellung von λ_1 korrekt sind: $\lambda_1 = 0.6604\dots$.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin danke ich herzlich für die Anregung und das stete Interesse an dieser Arbeit.

C. Vereinbarungen

Für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, sei $\|x\| := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$.

Für $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, sei

$$\|A\| := \sup \{ \|A \cdot x\| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \}.$$

Mit e_i werde der i -te Einheitsvektor bezeichnet. Für $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei $K(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$.

Für eine k -mal differenzierbare Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, sei $D^k f(x)$ die k -te Ableitung von f in $x \in U$; die Norm der k -linearen Abbildung $D^k f(x): (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei

$$\|D^k f(x)\| := \sup \{ \|D^k f(x)(y^1, \dots, y^k)\| \mid y^i \in \mathbb{R}^n, \|y^i\| = 1, 1 \leq i \leq k \}$$

Für $1 \leq i \leq n$ sei $D_i f(x) \in \mathbb{R}^m$ die partielle Ableitung nach der i -ten Komponente; für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei $D^\alpha f(x) := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(x)$.

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte offene Teilmenge. Der Sobolew-Raum $H^k(G)$, $k \in \mathbb{N}_0$, sei erklärt als

$$H^k(G) := \{u \in L_2(G) \mid D^\alpha u \in L_2(G) \text{ für } |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k\},$$

wobei $D^\alpha u$ die Ableitung von u im distributionellen Sinne zum Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei. Die Norm auf $H^k(G)$ sei

$$\|u\|_{k,G}^2 := \sum_{\ell=0}^k |u|_{\ell,G}^2; \quad |u|_{\ell,G}^2 := \sum_{|\alpha|=\ell} \int_G (D^\alpha u(x))^2 dx.$$

$H^k(G)$ ist bezüglich $\|\cdot\|_{k,G}$ ein separabler Hilbertraum (Wloka [82], Satz 3.1). Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge

mit $\overset{\circ}{U} \neq \emptyset$, so sei $H^k(U) := H^k(\overset{\circ}{U})$.

Sei G zusätzlich Lipschitz-stetig berandet (Wloka [82], Def. 2.4, $N^{0,1}$ -Eigenschaft). Auf $H^1(G)$ existiert genau ein stetiger linearer Spuroperator

$$\gamma : H^1(G) \rightarrow L_2(\partial G)$$

mit $\gamma(u) = u|_{\partial G}$ für $u \in C^1(\bar{G})$ (Wloka [82], Satz 8.7).

Für eine Teilmenge $R \subset \partial G$ mit positivem Längenmaß und $u \in H^1(G)$ sei die Schreibweise vereinbart:

$$u|_R := \gamma(u)|_R \in L_2(R).$$

Sei $(G_i)_{i \in I}$, $|I| < \infty$, eine Zerlegung von G in Lipschitz-stetig berandete Teilgebiet: $\bar{G} = \bigcup_{i \in I} \bar{G}_i$, $G_i \cap G_j = \emptyset$, $i \neq j$. Dann gilt:

$$(C.1) \quad u \in C(G); u|_{G_i} \in H^1(G_i), i \in I \Rightarrow u \in H^1(G).$$

Der Beweis verläuft analog wie der Beweis von Theorem 2.1.1 in Ciarlet [78].

Unter einer Fläche S werde eine offene Teilmenge einer in den $\mathbb{R}^3$ eingebetteten, kompakten, orientierbaren 2-dimensionalen C^∞ -Mannigfaltigkeit verstanden (vgl. Klingenberg [73], 5.5).

Eine injektive Abbildung $p: G \rightarrow S$, $G = \overset{\circ}{G} \subset \mathbb{R}^2$, heißt lokale Parametrisierung von S , wenn $p \in C^\infty(G)^3$ und $\text{rang}(Dp(t)) = 2$, $t \in G$, gilt. Eine lokale Parametrisierung $p: G \rightarrow S$ heißt regulär, wenn es eine offene Menge $G' \subset \mathbb{R}^2$ mit $\bar{G} \subset \subset G'$, eine

Fläche S' mit $S \subset S'$ und eine lokale Parametrisierung $p' : G' \rightarrow S'$ mit $p'|_G = p$ gibt. Eine injektive Abbildung $\kappa : S_O \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S_O = \overset{\circ}{S}_O \subset S$, heißt Karte in S , wenn $\kappa^{-1} : \kappa(S_O) \rightarrow S$ eine lokale Parametrisierung ist.

Sei $p : G \rightarrow S$ eine lokale Parametrisierung von S . Der Tangentialraum $T_x S$ im Punkt $x := p(t)$, $t \in G$, ist gleich dem Bild der linearen Abbildung $Dp(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$T_x S := \{b \in \mathbb{R}^3 \mid \exists a \in \mathbb{R}^2 : b = Dp(t) \cdot a\}.$$

Für eine Karte $\kappa : S_O \rightarrow \mathbb{R}^2$ in S und $x \in S_O$ sei $D\kappa(x) : T_x S \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Umkehrabbildung von $D\kappa^{-1}(\kappa(x))$; $D\kappa(x)$ wird stets als Matrix in $\mathbb{R}^{2,3}$ dargestellt.

Die 1. Fundamentalform (Klingenberg [73], 3.2) besitzt bzgl. p im Punkt $x = p(t)$ die kovariante Darstellung:

$$g_{ij}(t) := D_i p(t)^T \cdot D_j p(t), \quad 1 \leq i, j \leq 2;$$

die kontravariante Darstellung erhält man durch Invertieren:

$$(g^{ij}(t)) := (g_{ij}(t))^{-1}$$

$(g_{ij}(t))$ und $(g^{ij}(t))$ sind positiv definite Matrizen.

Mit $g(t) := \det(g_{ij}(t))$ gilt für das Oberflächenintegral:

$$\int_{p(G)} u \, d\sigma = \int_G u \circ p(t) \sqrt{g(t)} \, dt_1 dt_2.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei:

$$C^k(S) := \{u : S \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Für jede lokale Parametrisierung } p : G \rightarrow S \text{ gilt } u \circ p \in C^k(G)\}.$$

Ist $p : G \rightarrow S$ eine lokale Parametrisierung und $u \in C^1(S)$,

so ist der Gradient $Du(x) : T_x S \rightarrow \mathbb{R}$ von u in $x := p(t)$, $t \in G$, für $b \in T_x S$ definiert durch:
 $Du(x) \cdot b := D(u \circ p)(t) \cdot Dp^{-1}(x) \cdot b$.

Für $q \in [1, \infty)$ seien:

$\mathbb{L}_q(S) := \{u : S \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Für jede reguläre lokale Parametrisierung}$
 $p : G \rightarrow S \text{ ist } u \circ p \text{ meßbar und } \int_{p(G)} |u|^q d\sigma < \infty\}$,
 $L_q(S) := \mathbb{L}_q(S) / \{u \in \mathbb{L}_1(S) \mid \int_S |u| d\sigma = 0\}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei:

$H^k(S) := \{u \in L_2(S) \mid \text{Für jede reguläre lokale Parametrisierung}$
 $p : G \rightarrow S \text{ gilt } u \circ p \in H^k(G)\}$.

Es sei $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ die 2-dimensionale Sphäre.
 Die geodätischen Strecken auf S^2 sind genau die zusammenhängenden Teilmengen von Großkreisen. Eine nicht-leere, zusammenhängende offene Teilmenge $S \subset S^2$ heißt Polygongebiet, wenn gilt: $S^2 \setminus \bar{S} \neq \emptyset$, $\bar{S} = S$, ∂S ist Vereinigung endlich vieler geodätischer Strecken.

Für $x, y \in S^2$ sei $d_s(x, y) := \arccos(x^T \cdot y)$ ($0 \leq \arccos t \leq \pi$)
 der sphärische Abstand. Für $x, y \in S^2$ sei $d_s(x, y) :=$
 $\inf \{d_s(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. Für $x \in S^2$, $r > 0$, sei
 $K_s(x, r) := \{y \in S^2 \mid d_s(x, y) < r\}$.

I. EIGENWERTPROBLEME FÜR DEN LAPLACE-BELTRAMI-OPERATOR

Die Eigenwertprobleme zu selbstadjungierten elliptischen Differentialoperatoren auf beschränkten Gebieten können als Spezialfälle des folgenden abstrakten Eigenwertproblems für Bilinearformen auf Hilberträumen interpretiert werden (z.B. Stummel [69]) :

(AEWP) Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein separabler reeller Hilbertraum.

$a, b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ seien symmetrische Bilinearformen.

Es gebe Konstanten $C_1, C_2, C_3 > 0$, $C_4 \geq 0$, so daß für alle $u, v \in V$ gilt:

$$(a) \quad |a(u, v)| \leq C_1 \|u\| \|v\| ,$$

$$|b(u, v)| \leq C_2 \|u\| \|v\| ,$$

$$(b) \quad a(u, u) \geq C_3 \|u\|^2 - C_4 b(u, u)$$

$$(c) \quad b(u, u) > 0 \quad \text{für } u \neq 0$$

(d) b sei kompakt, d.h. für jede Folge $(u_n) \subset V$, die schwach gegen $u \in V$ konvergiert, konvergiert

$$(b(u_n, u_n)) \subset \mathbb{R} \quad \text{gegen } b(u, u) \in \mathbb{R} .$$

Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $u \neq 0$, mit

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \text{für alle } v \in V$$

#

In Abschnitt 1 werden die Eigenwertaufgaben für den Laplace-Beltrami-Operator als Variationsaufgaben der Form (AEWP) formuliert. Die Definition von V , insbesondere der Norm,

wird dabei darauf abgestimmt, die Fehlerabschätzungen in Kapitel III zu erleichtern. Zur numerischen Lösung von (AEWP) bietet sich das Rayleigh-Ritz-Verfahren an. In Abschnitt 2 wird dieses in der Literatur ausgiebig untersuchte Verfahren kurz dargestellt.

1. Schwache Formulierung des Eigenwertproblems

Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche. Der Laplace-Beltrami-Operator

$$\Delta : C^2(S) \rightarrow C(S)$$

ist für $u \in C^2(S)$ definiert durch die lokale Darstellung:

$$(\Delta u) \circ p := \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^2 D_i (\sqrt{g} \sum_{j=1}^2 g^{ij} D_j (u \circ p))$$

für jede lokale Parametrisierung p von S .

Thema der vorliegenden Arbeit ist die numerische Lösung von Eigenwertaufgaben für Δ auf Polygonegebieten der Sphäre S^2 . Die Aufgabenstellung ist bestimmt durch:

(AS) Es sei $S \subset S^2$ ein Polygonegebiet oder $S = S^2$.

- (a) Für $S \neq S^2$ sei der Rand ∂S von S zerlegt in ∂S_D und ∂S_N , wobei $\partial S_D, \partial S_N$ jeweils Vereinigung endlich vieler geodätischer Strecken seien:
- $$\partial S = \partial S_D \cup \partial S_N, \quad \partial S_D \cap \partial S_N = \emptyset.$$

- (b) S sei in $M \in \mathbb{N}$ Polygonegebiete $S_i, 1 \leq i \leq M$, zerlegt:
- $$\bar{S} = \bigcup_{i=1}^M \bar{S}_i, \quad \bigcap_{i=1}^M S_i = \emptyset.$$

Es sei eine positive Gewichtsfunktion $p: S \rightarrow \mathbb{R}^+$ vorgegeben, die auf S_i , $1 \leq i \leq M$, jeweils konstant sei:

$$p_i := p|_{S_i} \in \mathbb{R}^+, \quad 1 \leq i \leq M. \quad \#$$

Die Menge der singulären Punkte X_S sei definiert als die Menge der Punkte aus $\partial S \cup \bigcup_{i=1}^M \partial S_i$, in denen eine Ecke von ∂S oder ∂S_i , $1 \leq i \leq M$, vorliegt oder in denen die Randbedingung wechselt. Die klassische Formulierung der Eigenwertaufgabe lautet

(EWP) Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u \in C(\bar{S})$, $u \neq 0$, mit

$$u_i := u|_{S_i} \in C^2(S_i), \quad 1 \leq i \leq M, \quad \text{und:}$$

$$(a) \quad p_i \Delta u_i + \lambda p_i u_i = 0, \quad 1 \leq i \leq M,$$

(b) Für $x \in (\partial S_i \cap \partial S_j) \setminus X_S$, $1 \leq i, j \leq M$, und eine Normale $n(x)$ an $\partial S_i \cap \partial S_j$ in x gilt:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in S_i}} p_i \Delta u_i(y) \cdot n(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in S_j}} p_j \Delta u_j(y) \cdot n(x).$$

(c) Für $x \in \partial S_D$ gilt $u(x) = 0$,

für $x \in \partial S_N \setminus X_S$ und eine Normale $n(x)$ an ∂S_N in x gilt $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in S}} \Delta u(y) \cdot n(x) = 0$

#

Wir geben im folgenden eine Formulierung von (EWP) als Variationsaufgabe der Form (AEWP).

Der Hilbertraum V wird als Sobolew-Raum realisiert. In der Literatur ist es üblich, die Normen auf Sobolew-Räumen $H^k(S)$ über einer Fläche S mit Hilfe von Partitionen der Eins auf S zu erklären (z.B. Wloka [82], 4.2). Die Normen zu verschiedenen Partitionen der Eins sind dann paarweise äquivalent, aber i.a. nicht gleich. Aus beweistechnischen Gründen erweist sich die folgende Definition der Norm mit Hilfe der stereografischen Projektion als zweckmäßiger als die Definition durch Auszeichnung einer Partition der Eins.

1.1 Definition

Es sei $D = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^{3,3}$ ein Dreibein. Die stereografische Projektion σ_D zum Dreibein D ist definiert als

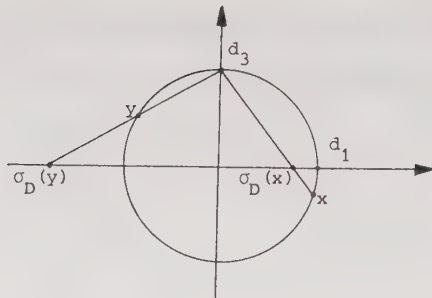
$$\sigma_D : \begin{cases} S^2 \setminus \{d_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \rightarrow \sigma_D(x) := (1 - d_3^T x)^{-1} \begin{pmatrix} d_1^T \cdot x \\ d_2^T \cdot x \end{pmatrix} \end{cases}$$

#

1.2 Bemerkungen

(a) Geometrische Interpretation:

σ_D ist die Projektion aus dem Pol d_3 auf die von d_1, d_2 aufgespannte Äquatorebene.



Der Punkt $-d_3$ heißt Fußpunkt von σ_D .

(b) Die Umkehrabbildung ist gegeben durch:

$$\sigma_D^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \\ s = (s_1, s_2) \rightarrow \sigma_D^{-1}(s) := (1 + s_1^2 + s_2^2)^{-1} D \cdot \begin{pmatrix} 2s_1 \\ 2s_2 \\ s_1^2 + s_2^2 - 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Für jedes beschränkte Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ist $\sigma_D^{-1}|_G$ eine reguläre lokale Parametrisierung von S^2 . Die kontravariante erste Fundamentalform und das Flächenelement lauten

$$\gamma = \gamma(s) := 1 + s_1^2 + s_2^2 ; \\ g^{11} = g^{22} = \frac{\gamma^2}{4} ; \quad g^{12} = g^{21} = 0 ; \quad \sqrt{g} = \frac{4}{\gamma} .$$

Für $u \in C^2(\sigma_D^{-1}(G))$ folgt die lokale Darstellung

$$(\Delta u) \circ \sigma_D^{-1} = \frac{\gamma^2}{4} (D_1^2(u \circ \sigma_D^{-1}) + D_2^2(u \circ \sigma_D^{-1})) = \frac{\gamma^2}{4} \Delta(u \circ \sigma_D^{-1})$$

#

Die Bedeutung der stereografischen Projektion für die vorliegende Arbeit beruht auf der Möglichkeit, jedes echte Polygonegebiet $S \subset S^2$ durch eine reguläre Parametrisierung vollständig zu überdecken. Ist $D = (d_1, d_2, d_3)$ ein Dreibein mit $d_3 \in S^2 \setminus \bar{S}$, so wird durch $\sigma_D^{-1} : \sigma_D(S) \rightarrow S$ eine reguläre Parametrisierung von S definiert. Das Parametergebiet $\sigma_D(S) \subset \mathbb{R}^2$ ist beschränkt und Lipschitz-stetig berandet; der Rand ist aus endlich vielen Kreis- und Geradenstücken zusammengesetzt.

Unter Voraussetzung (AS) sei folgende Vereinbarung getroffen:

(N) Es sei $\{D_i = (d_1^i, d_2^i, d_3^i) \mid 1 \leq i \leq M\}$ eine Familie von Dreibeinen mit $d_3^i \in S^2 \setminus \bar{S}_i$, $1 \leq i \leq M$. Die stereografische Projektion zum Dreibein D_i werde mit σ_i bezeichnet, das Bild von S_i unter σ_i mit $G_i := \sigma_i(S_i)$.

1.3 Definition

Es seien die Voraussetzungen (AS) und (N) erfüllt.

(a) Für $u = \tilde{u} \subset S$ und $u \in H^k(u)$, $k \in \mathbb{N}_0$, sei definiert:

$$|u|_{k,u} := \left(\sum_{\substack{i=1 \\ u \cap S_i \neq \emptyset}}^M |u \circ \sigma_i^{-1}|_{k, \sigma_i(u \cap S_i)}^2 \right)^{1/2}.$$

$$\|u\|_{k,u} := \left(\sum_{\ell=0}^k |u|_{\ell,u}^2 \right)^{1/2}.$$

Für $u = S$ sei vereinbart: $\|u\|_k := \|u\|_{k,S}$, $|u|_k := |u|_{k,S}$.

(b) Der lineare Teilraum

$$H_R^1 := \{u \in H^1(S) \mid u \circ \sigma_i^{-1} \big|_{\sigma_i(\partial S_D \cap \partial S_i)} = 0, \quad 1 \leq i \leq M\}$$

von $H^1(S)$ sei mit der Norm $\|\cdot\|_1$ versehen.

#

1.4 Bemerkungen

(a) Aus Definition 1.3 folgt, daß die Abbildung

$$j: \begin{cases} H^1(S) \rightarrow H := H^1(G_1) \times \dots \times H^1(G_M) \\ u \rightarrow (u \circ \sigma_1^{-1}, \dots, u \circ \sigma_M^{-1}) \end{cases}$$

eine injektive, isometrische, lineare Abbildung in den abgeschlossenen Teilraum

$$W := \{w = (w_1, \dots, w_M) \in H \mid \text{Für } 1 \leq i, j \leq M, i \neq j, |\partial S_i \cap \partial S_j| > 1$$

$$\text{gilt: } (\sigma_j \circ \sigma_i^{-1}) \circ (w_i \big|_{\sigma_i(\partial S_i \cap \partial S_j)}) = w_j \big|_{\sigma_j(\partial S_i \cap \partial S_j)}\}$$

von H ist. Zum Nachweis von $j(H^1(S)) = W$, d.h. daß für $w \in W$ die Funktion $u \in L_2(S)$ mit $u \big|_{S_i} := w_i \circ \sigma_i$, $1 \leq i \leq M$, in $H^1(S)$ liegt, genügt es zu zeigen, daß für jede reguläre lokale Parametrisierung $p: G \rightarrow S$ gilt: $u \circ p \in H^1(G)$. Dies folgt aus (C.1).

Somit ist j ein Isomorphismus von $H^1(S)$ auf W . Da der Hilbertraum H separabel ist, folgt, daß $H^1(S)$ ein separabler Hilbertraum ist. Mit $H^1(S)$ ist dann auch der abgeschlossene Teilraum H_R^1 ein separabler Hilbertraum.

(b) Nach dem Satz von Rellich (Wloka [82], Satz 7.2) sind die Einbettungen $H^1(G_1) \rightarrow L_2(G_1)$, $1 \leq i \leq M$, kompakt. Dann ist auch die Einbettung $H \rightarrow L := L_2(G_1) \times \dots \times L_2(G_M)$ der Produkträume kompakt. Der Raum $L_2(S)$, versehen mit der Norm $\|u\|_0 = \left(\sum_{i=1}^M \|u \circ \sigma_i^{-1}\|_{0, G_i}^2 \right)^{1/2}$, $u \in L_2(S)$, wird durch die Zuordnung $u \rightarrow (u \circ \sigma_1^{-1}, \dots, u \circ \sigma_M^{-1})$ isomorph auf L abgebildet. Es folgt, daß die zu abgeschlossenen Unterräumen von H isomorphen Räume $H^1(S)$ und H_R^1 kompakt in $L_2(S)$ eingebettet sind.

#

Für die Definition der Bilinearform a wird der erste Differentiator von Beltrami (Kreyszig [57], S. 277) eingeführt:

$$\nabla : C^1(S) \times C^1(S) \rightarrow C(S),$$

der für $u, v \in C^1(S)$ definiert ist durch die lokale Darstellung:

$$\nabla(u, v) \circ p := \sum_{i,j=1}^2 D_i(u \circ p) g^{ij} D_j(v \circ p)$$

für jede lokale Parametrisierung $p: G \rightarrow S$.

Da die Komponenten g^{ij} der kontravarianten 1. Fundamentalform für jede reguläre lokale Parametrisierung p in $C^\infty(\bar{G})$ liegen, kann ∇ stetig fortgesetzt werden

$$\nabla : H^1(S) \times H^1(S) \rightarrow L_1(S).$$

Seien $u, v \in H^1(S)$ mit $u|_{S_i} \in H^2(S_i)$, $1 \leq i \leq M$. Durch Anwendung der 1. Greenschen Formel (Necas [67], Théorème 1.1, Chap. 3) auf die Darstellung des Integrals $\int_{S_i} \nabla(u, v) d\sigma$ bezüglich der

Parametrisierung σ_i zeigt man:

$$\int_{S_i} v \Delta u \, d\sigma = \int_{\partial S_i} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \int_{S_i} \nabla(u, v) \, d\sigma, \quad 1 \leq i \leq M,$$

wobei $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ die fast überall existierende Ableitung in Richtung der äußeren Normalen an ∂S_i in x sei.

Ist u eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ von (EWP) und erfüllt u die Regularitätsbedingung $u|_{S_i} \in H^2(S_i)$, $1 \leq i \leq M$, so folgt durch Summation der Integrationsformeln:

$$\int_S p \nabla(u, v) \, d\sigma = \lambda \int_S p u v \, d\sigma \quad \text{für alle } v \in H_R^1.$$

Dies führt auf die folgende Definition.

1.5 Definition

Es seien die Voraussetzungen (AS) und (N) erfüllt.

Die Bilinearformen $a, b: H_R^1 \times H_R^1 \rightarrow \mathbb{R}$ seien für $u, v \in H_R^1$ definiert als

$$a(u, v) := \int_S p \nabla(u, v) \, d\sigma,$$

$$b(u, v) := \int_S p u v \, d\sigma. \quad \#$$

Die schwachen Lösungen von (EWP) werden definiert als Lösungen von

(SEWP) Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in H_R^1$, $u \neq 0$, mit:

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \text{für alle } v \in H_R^1.$$

1.6 Satz

Es seien die Voraussetzungen (AS), (N) gegeben. Dann gilt:

- (a) Die Bilinearformen a, b aus Definition 1.5 erfüllen die Voraussetzungen (a)-(d) von (AEWP).
- (b) Für (SEWP) existiert eine Folge von Eigenwerten $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$, und zugehörigen Eigenfunktionen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_R^1$ mit

$$a(u_n, u_m) = \lambda_n b(u_n, u_m) = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

Beweis:

(a) Die Bilinearformen a, b sind symmetrisch auf H_R^1 .

Um die Stetigkeit von a nachzuweisen, zeigen wir, daß

$\nabla: H^1(S) \times H^1(S) \rightarrow L_1(S)$ stetig ist. Nach 1.2(b) gilt für die Darstellung von $\nabla(u, v)$ bezüglich σ_i^{-1} :

$$(1) \quad \nabla(u, v) \circ \sigma_i^{-1} = \frac{\gamma^2}{4} \sum_{k=1}^2 D_k(u \circ \sigma_i^{-1}) D_k(v \circ \sigma_i^{-1}),$$

$$\gamma := \gamma(s_1, s_2) := 1 + s_1^2 + s_2^2.$$

Integration und Anwendung der Schwarzschen Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \int_{S_i} |\nabla(u, v)| \, d\sigma &= \int_{S_i} \left| \sum_{k=1}^2 D_k(u \circ \sigma_i^{-1}) D_k(v \circ \sigma_i^{-1}) \right| \frac{4}{\gamma^2} \, ds_1 ds_2 \\ &\leq 2 \|u\|_{1, S_i} \|v\|_{1, S_i} \end{aligned}$$

Durch Summation über i folgt die Stetigkeit von ∇ :

$$\|\nabla(u,v)\|_{L_1(S)} \leq 2\|u\|_1\|v\|_1 \leq 2\|u\|_1\|v\|_1.$$

Mit $p_{\max} := \max \{p_i | 1 \leq i \leq M\}$ erhält man:

$$|a(u,v)| \leq 2 p_{\max} \|u\|_1 \|v\|_1.$$

Die Stetigkeit von b folgt aus der Schwarzschen Ungleichung:

$$\int_{S_i} uv d\sigma = \int_{G_i} (u \circ \sigma_i^{-1})(v \circ \sigma_i^{-1}) \frac{4}{\gamma^2} ds_1 ds_2 \leq 4|u|_{O,S_i}|v|_{O,S_i}$$

Summation über i liefert:

$$(2) \quad |b(u,v)| \leq 4 p_{\max} \|u\|_O \|v\|_O \leq 4 p_{\max} \|u\|_1 \|v\|_1.$$

Wir zeigen die Koerzitivität von a . Für $u \in H_R^1$ gilt

$$(3) \quad \|u\|_1^2 = \sum_{i=1}^M |u|_{1,S_i}^2 + \sum_{i=1}^M |u|_{O,S_i}^2 \leq p_{\min}^{-1} \left(\sum_{i=1}^M p_i |u|_{1,S_i}^2 \right.$$

$$\left. + C_4 \sum_{i=1}^M p_i \int_{G_i} (u \circ \sigma_i^{-1})^2 \frac{4}{\gamma^2} ds_1 ds_2 \right),$$

$$p_{\min} := \min \{p_i | 1 \leq i \leq M\}; \quad C_4 := \max_{1 \leq i \leq M} (\min_{G_i} 4/\gamma^2)^{-1}$$

Aus der Darstellung (1) folgt:

$$\sum_{i=1}^M p_i |u|_{1,S_i}^2 = \sum_{i=1}^M p_i \int_{G_i} \sum_{k=1}^2 (D_k(u \circ \sigma_i^{-1}))^2 ds_1 ds_2 = a(u,u).$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^M p_i \int_{G_i} (u \circ \sigma_i^{-1})^2 \frac{4}{\gamma^2} ds_1 ds_2 = \sum_{i=1}^M p_i \int_{S_i} u^2 d\sigma = b(u,u)$$

erhält man aus (3) :

$$a(u,u) \geq p_{\min} \|u\|_1^2 - C_4 b(u,u) .$$

Die Positivität von b ist trivial.

Die Einbettung $H_R^1 \rightarrow L_2(S)$ ist nach 1.4(b) kompakt. Somit gilt für jede in H_R^1 schwach konvergente Folge (u_n) , daß (u_n) bzgl. $\|\cdot\|_0$ konvergiert. Da $b(u,u)$ nach (2) bzgl. $\|\cdot\|_0$ stetig ist, folgt die Konvergenz von $(b(u_n, u_n))$.

(b) Die Behauptung folgt mit (a) aus der Lösungstheorie für (AEWP), die z.B. in Stummel [69], 1. Kap., 3.4, dargestellt ist. Da für alle $u \in H_R^1$ gilt

$$a(u,u) = \sum_{i=1}^M p_i \int_{G_i} \sum_{k=1}^2 (D_k(u \circ \sigma_i^{-1}))^2 ds_1 ds_2 \geq 0 ,$$

folgt für alle Eigenwerte $\lambda_n = a(u_n, u_n) / b(u_n, u_n) \geq 0$.

#

2. Das Rayleigh-Ritz-Verfahren

Es sei das Eigenwertproblem (AEWP) gegeben. Für die Konstante C_4 gelte $C_4 = 0$. Dies kann für $C_4 > 0$ durch eine Spektralverschiebung erreicht werden: man ersetze die Bilinearform a durch $\bar{a} := a + C_4 b$. Ist λ Eigenwert zu a, b mit Eigenfunktion u , so ist $\lambda + C_4$ Eigenwert zu $\bar{a}, b$ mit Eigenfunktion u .

Es sei $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Folge der Eigenwerte, wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit aufgeführt ist, und $N(k)$, $k \in \mathbb{N}$, die Menge der normierten Eigenfunktionen zu λ_k :

$$N(k) := \{u \in V \mid a(u, v) = \lambda_k b(u, v) \quad \forall v \in V, \|u\| = 1\}.$$

Sei $(V_h)_{h \in H}$, $H \subset (0, 1)$, $0 \in \bar{H}$, eine Familie von endlich dimensionalen Teilräumen von V . Die Dimension von V_h sei $d(h)$.

Das Rayleigh-Ritz-Verfahren mit Ansatzraum V_h lautet:

(RR) Suche $\lambda_h \in \mathbb{R}$, $u_h \in V_h$ mit:

$$a(u_h, v_h) = \lambda_h b(u_h, v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h.$$

Ist $\{\varphi_i^h \mid 1 \leq i \leq d(h)\}$ eine Basis von V_h , so ist (RR) äquivalent zum Matrix-Eigenwertproblem:

$$(RR') \quad A_h x_h = \lambda_h B_h x_h, \quad x_h \in \mathbb{R}^{d(h)},$$

$$A_h := (a(\varphi_i^h, \varphi_j^h))_{i,j=1,\dots,d(h)},$$

$$B_h := (b(\varphi_i^h, \varphi_j^h))_{i,j=1,\dots,d(h)},$$

$$u_h := \sum_{i=1}^{d(h)} x_h^i \varphi_i^h.$$

Wegen (b), (c) aus (AEWP) und $C_4 = 0$ sind die Matrizen

A_h, B_h positiv definit. Es existieren somit reelle Eigenwerte λ_h^i , $1 \leq i \leq d(h)$, von (RR) und zugehörige Eigenfunktionen

u_h^i , $1 \leq i \leq d(h)$, mit:

$$a(u_h^i, u_h^j) = \lambda_h^i b(u_h^i, u_h^j) = \delta_{i,j} \lambda_h^i, \quad 1 \leq i, j \leq d(h).$$

Es ist wohlbekannt, daß die Fehlerabschätzung für das Rayleigh-Ritz-Verfahren auf die Abschätzung des Approximationsfehlers zurückgeführt werden kann.

2.1 Satz

Es gelte $\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v \in V_h} \|u - v\| = 0$ für alle $u \in V$. Dann existiert

für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $C_k > 0$, so daß für hinreichend kleine h gilt:

$$(a) \quad 0 \leq \lambda_h^k - \lambda_k \leq C_k \left(\sup_{u \in N(k)} \inf_{v \in V_h} \|u - v\| \right)^2$$

$$(b) \quad \inf_{u \in N(k)} \|u_h^k - u\| \leq C_k \sup_{u \in N(k)} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|$$

Beweis:

z.B. Fix [73], Vainikko [67, 70]

#

Im folgenden wird das Rayleigh-Ritz-Verfahren angewandt zur Approximation von Lösungen des schwachen Eigenwertproblems (SEWP). Bei der Konstruktion der Ansatzräume $V_h \subset H_R^1$, $h \in H$, sind dabei zwei Forderungen zu erfüllen. Zur Vorhersage der Konvergenzordnung ist gemäß Satz 2.1 die Güte der Approximation abzuschätzen, die mit Ansatzfunktionen $v \in V_h$ für normierte Eigenfunktionen $u \in N(k)$ erreicht werden kann. Ferner ist die möglichst effiziente numerische Durchführbarkeit des Verfahrens

sicherzustellen. Da für die numerische Lösung des volldefiniten Eigenwertproblems (RR') bewährte Algorithmen zur Verfügung stehen, verbleibt die Aufgabe, die Berechnung der Matrizen A_h, B_h anzugeben.

II. KONSTRUKTION DER ANSATZRÄUME

Die Anwendung des Rayleigh-Ritz-Verfahrens auf das schwache Eigenwertproblem (SEWP) setzt die Konstruktion geeigneter Ansatzräume voraus. Für Eigenwertprobleme auf ebenen Gebieten haben sich Finite-Element-Räume als Ansatzräume bewährt. In diesem Kapitel wird das Konzept der Finiten Elemente auf Flächen übertragen. Dabei sollen die Finiten Elemente der Geometrie der Fläche entsprechen; es wird kein Gebrauch gemacht werden von Approximationen der Fläche.

3. Finite Elemente auf Flächen

Es sei $E := \{t \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1, 0 \leq t_2, t_1 + t_2 \leq 1\}$ das abgeschlossene Einheitsdreieck im $\mathbb{R}^2$. Die Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ von E werden mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet. Es sei $\pi(E) := \{A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid A \text{ ist affine Bijektion mit } A(E) = E\}$.

Für $t, t' \in \mathbb{R}^2$ sei $\overline{t, t'} := \{(1-s)t + st' \mid s \in [0,1]\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{P}_n$ der Raum der Polynome in zwei Variablen mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich n .

Ausgangspunkt bei der Konstruktion von Finite-Element-Räumen ist die Vorgabe eines Referenz-Elements.

3.1 Definition

Es sei P ein endlich-dimensionaler Raum von Polynomen mit $\mathcal{P}_1 \subset P$ und $p \circ A \in P$ für alle $p \in P$, $A \in \pi(E)$.

L, H seien endliche Teilmengen von E mit $\{a_1, a_2, a_3\} \subset L$ und $A(L) = L$, $A(H) = H$ für alle $A \in \pi(E)$. $R := (P, L, H)$ heißt Referenz-Element, wenn gilt:

(a) (Unisolvenz) Für alle $f: L \rightarrow \mathbb{R}$, $g: H \rightarrow \mathbb{R}^2$ existiert genau ein $p \in P$ mit $p(t) = f(t)$, $t \in L$, und $Dp(t) = g(t)^T$, $t \in H$. L heißt die Menge der Lagrange-Knoten, H die Menge der Hermite-Knoten. Das durch f und g eindeutig bestimmte $p \in P$ wird mit $I_R(f, g)$ bezeichnet.

(b) (Stetiger Übergang) Für Interpolationsdaten $f_i: L \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i: H \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i=1, 2$, mit

$$f_1(t) - f_2(t) = 0, \quad t \in \overline{a_1, a_2} \cap L,$$

$$(g_1(t) - g_2(t))^T e_1 = 0, \quad t \in \overline{a_1, a_2} \cap H,$$

$$\text{gilt } I_R(f_1, g_1) \Big|_{\overline{a_1, a_2}} = I_R(f_2, g_2) \Big|_{\overline{a_1, a_2}}.$$

Die Ordnung von R sei $k := 1 + \max \{n | \mathbb{P}_n \subset P\}$.

Für $H \neq \emptyset$ sei stets $k \geq 3$, d.h. $\mathbb{P}_2 \subset P$.

#

In Definition 3.1 wurde P als Raum von Polynomen vorausgesetzt und die Art der Knoten auf Lagrange- und Hermite-Knoten eingeschränkt. In der Literatur über Finite Elemente, vgl. z.B. Ciarlet [78], werden allgemeinere Definitionen gegeben. So wird von P lediglich gefordert, ein endlich-dimensionaler Funktionenraum zu sein, und als Knoten werden beliebige Funktionale

zugelassen. Diese Allgemeinheit der Definition wird bei den üblichen Dreieckselementen mit "nur" stetigem Übergang nicht ausgeschöpft. Mit Definition 3.1 wird ein für diese Elemente ausreichender Rahmen abgesteckt.

3.2 Beispiele

Es seien s_1, s_2, s_3 die Seitenhalbierenden von E , s der Schwerpunkt von E .

(a) Lagrange-Element der Ordnung $n+1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$P := \mathbb{P}_n, \quad L := \left\{ \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \mid i, j \in \mathbb{N}_0, i+j \leq n \right\},$$

$$H := \emptyset.$$

(b) Kubisches Hermite-Element:

$$P := \mathbb{P}_3, \quad L := \{a_1, a_2, a_3, s\}, \quad H := \{a_1, a_2, a_3\},$$

Ordnung $k = 4$.

(c) Reduziertes kubisches Hermite-Element:

$$P := \{p \in \mathbb{P}_3 \mid 6p(s) - 2 \sum_{i=1}^3 p(a_i) + \sum_{i=1}^3 Dp(a_i)(a_i - s) = 0\},$$

$$L := \{a_1, a_2, a_3\}, \quad H := \{a_1, a_2, a_3\},$$

Ordnung $k = 3$.

Für den Nachweis der Unisolvenz sei auf Ciarlet [78] verwiesen, die Eigenschaft des stetigen Übergangs ist unmittelbar einzusehen.

#

Im folgenden sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $S_0 = \bar{S}_0 \subset S$, $S_0 \neq \emptyset$, $\bar{S}_0 \subset S$.

3.3 Definition

(a) Ein Paar (κ, K) heißt parametrisiertes Dreieck in S , wenn gilt:

(i) $\kappa : D_K \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist Karte in S ,

(ii) $K \subset D_K$ und $\kappa(K) = E$.

(b) Eine Familie $T = ((\kappa_i, K_i))_{i \in I}$, $|I| \in \mathbb{N}$, von parametrisierten Dreiecken in S heißt parametrisierte Triangulierung von $\bar{S}_0$, wenn gilt:

(i) $\bigcup_{i \in I} K_i = \bar{S}_0$

(ii) Für $i, j \in I$, $i \neq j$, gilt genau eine der Aussagen:

- $K_i \cap K_j = \emptyset$
- $\kappa_i(K_i \cap K_j)$, $\kappa_j(K_i \cap K_j)$ sind Seiten von E ,
- $\kappa_i(K_i \cap K_j)$, $\kappa_j(K_i \cap K_j)$ sind Ecken von E .

#

Sei $R = (P, L, H)$ ein Referenz-Element. Die Ordnung k von R erfüllt wegen $\mathbb{P}_1 \subset P$ stets $k \geq 2$. Für $H \neq \emptyset$ gilt nach Definition 3.1 sogar $k \geq 3$. Nach dem Sobolewschen Einbettungssatz (Néças [67], Théorème 3.8, Chap. 2, S. 72) ist somit stets $H^k(E) \subset C(E)$ erfüllt und für $H \neq \emptyset$ sogar $H^k(E) \subset C^1(E)$. Dies rechtfertigt die Definition des Projektionsoperators

$$P_R : \begin{cases} H^k(E) \rightarrow P \\ u \rightarrow P_R u := I_R(u|_L, Du|_H) \end{cases}.$$

Ist (κ, K) ein parametrisiertes Dreieck in S , so sei

$$p_{R, \kappa, K} : \begin{cases} H^k(K) \rightarrow P_{\circ \kappa} := \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists p \in P : f = p \circ \kappa\} \\ u \rightarrow p_{R, \kappa, K} u := (p_R(u \circ \kappa^{-1})) \circ \kappa . \end{cases}$$

Sind $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}^3$ Funktionen mit $\kappa^{-1}(L) \subset D_f \subset S$, $\kappa^{-1}(H) \subset D_g \subset S$ und $g(x) \in T_x S$, $x \in D_g$, so sei

$$I_{R, \kappa, K}(f, g) := I_R(\bar{f}, \bar{g}), \text{ wobei}$$

$$\bar{f} : L \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{f}(t) := f(\kappa^{-1}(t)), \quad t \in L,$$

$$\bar{g} : H \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \bar{g}(t)^T := g(\kappa^{-1}(t))^T \cdot D\kappa^{-1}(t), \quad t \in H.$$

3.4 Definition

Es sei $T = ((\kappa_i, K_i))_{i \in I}$ eine parametrisierte Triangulierung von S_0 und $R = (P, L, H)$ ein Referenz-Element. Es seien

$$L_T := \{x \in \bar{S}_0 \mid \exists i \in I : \kappa_i(x) \in L\},$$

$$F(L_T) := \{f \mid f : L_T \rightarrow \mathbb{R}\},$$

$$H_T := \{x \in \bar{S}_0 \mid \exists i \in I : \kappa_i(x) \in H\},$$

$$G(H_T) := \{g \mid g : H_T \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x) \in T_x S \text{ für } x \in H_T\}.$$

Der Finite-Element-Raum $S_{T,R}$ sei definiert als

$$S_{T,R} := \{u \in C(\bar{S}_0) \mid \exists f \in F(L_T), g \in G(H_T) \forall i \in I : u \circ \kappa_i^{-1} = I_{R, \kappa_i, K_i}(f, g)\}.$$

Der Finite-Element-Raum $S_{T,R}$ besitzt die Interpolationseigenschaft, wenn für alle $f \in F(L_T)$, $g \in G(H_T)$ ein $u \in S_{T,R}$ existiert mit $u \circ \kappa_i^{-1} = I_{R, \kappa_i, K_i}(f, g)$, $i \in I$.

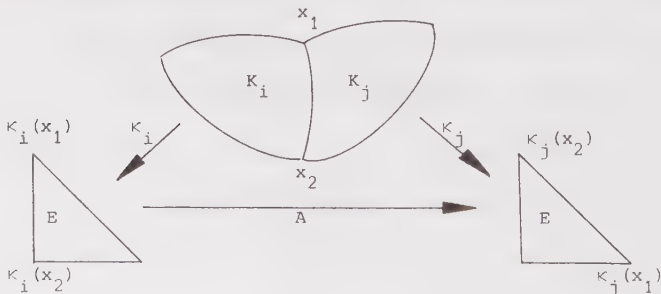
Als Ansatzräume für das Rayleigh-Ritz-Verfahren sind nur Finite-Element-Räume mit der Interpolationseigenschaft geeignet. Wir stellen deshalb ein Kriterium an die parametrisierten Triangulierungen zum Nachweis der Interpolationseigenschaft bereit. Falls für $f \in F(L_T)$, $g \in G(H_T)$ ein $u \in S_{T,R}$ existiert mit $u \circ \kappa_i^{-1} = I_{R, \kappa_i, K_i}(f, g)$, $i \in I$, dann ist u durch diese Eigenschaft bereits eindeutig bestimmt. Für f, g existiert somit genau dann eine Interpolierende $u \in S_{T,R}$, wenn die Funktionen $p_i := I_{R, \kappa_i, K_i}(f, g) \circ \kappa_i$, $i \in I$, an den Elementgrenzen stetig ineinander übergehen.

3.5 Satz

Die parametrisierte Triangulierung $T = ((\kappa_i, K_i))_{i \in I}$ von S_0 erfülle die Bedingung:

(V) falls K_i und K_j , $i, j \in I$, $i \neq j$, eine gemeinsame Seite mit den Endpunkten x_1, x_2 besitzen, dann gilt für die affine Bijektion $A \in \pi(E)$, die durch $x_k = \kappa_j^{-1}(A(\kappa_i(x_k)))$, $k = 1, 2$, bestimmt ist:

$$\kappa_i^{-1}(t) = \kappa_j^{-1}(A(t)) \quad \text{für alle } t \in \kappa_i(K_i \cap K_j).$$



Dann besitzt $S_{T,R}$ für jedes Referenz-Element R die Interpolationseigenschaft.

Beweis:

Sei R ein Referenz-Element und seien $f \in F(L_T)$, $g \in G(H_T)$.
Für $i \in I$ sei $p_i := I_{R, \kappa_i, K_i}(f, g) \circ \kappa_i$. Nach obiger Bemerkung genügt es, für $i, j \in I$, $i \neq j$, zu zeigen:

$$(1) \quad K_i \cap K_j \neq \emptyset \Rightarrow p_i|_{K_i \cap K_j} = p_j|_{K_i \cap K_j} .$$

Nach 3.3(b) sind $\kappa_i(K_i \cap K_j)$ und $\kappa_j(K_i \cap K_j)$ entweder Seiten oder Ecken von E .

Sind $\kappa_i(K_i \cap K_j)$ und $\kappa_j(K_i \cap K_j)$ Ecken von E , so folgt (1) wegen $\{a_1, a_2, a_3\} \subset L$.

Seien $\kappa_i(K_i \cap K_j)$ und $\kappa_j(K_i \cap K_j)$ Seiten von E . Die affinen Bijektionen $A_i, A_j \in \pi(E)$ seien bestimmt durch

$$A_i(\kappa_i(K_i \cap K_j)) = \overline{a_1, a_2} ,$$

$$A_j(\kappa_j(K_i \cap K_j)) = \overline{a_1, a_2} ,$$

$$\kappa_i^{-1}(A_i^{-1}(a_1)) = \kappa_j^{-1}(A_j^{-1}(a_1)) .$$

Für $A \in \pi(E)$ mit $x_k = \kappa_j^{-1}(A(\kappa_i(x_k)))$, $k = 1, 2$, gilt dann

$$A = A_j^{-1} \circ A_i . \text{ Seien}$$

$$\hat{\kappa}_i := A_i \circ \kappa_i , \quad \hat{\kappa}_j := A_j \circ \kappa_j .$$

Aus Bedingung (V) erhält man für $t \in \overline{a_1, a_2}$:

$$\hat{\kappa}_i^{-1}(t) = \hat{\kappa}_j^{-1}(t) \quad , \quad D\hat{\kappa}_i^{-1}(t) \cdot e_1 = D\hat{\kappa}_j^{-1}(t) \cdot e_1 \quad .$$

Wegen 3.1(b) folgt damit für alle $t \in \overline{a_1, a_2}$:

$$I_{R, \hat{\kappa}_i, K_i}(f, g)(t) = I_{R, \hat{\kappa}_j, K_j}(f, g)(t) \quad .$$

Wegen $I_{R, \kappa_k, K_k}(f, g) = I_{R, \hat{\kappa}_k, K_k}(f, g) \circ A_k$, $k=i, j$,

folgt für alle $t \in \kappa_i(K_i \cap K_j)$:

$$I_{R, \kappa_i, K_i}(f, g)(t) = I_{R, \kappa_j, K_j}(f, g)(A(t)) \quad ,$$

und daraus

$$p_i(\kappa_i^{-1}(t)) = p_j(\kappa_j^{-1}(A(t))) \quad .$$

Mit Bedingung (V) folgt (1).

#

3.6 Bemerkungen

(a) Die Bedingung (V) kann interpretiert werden als Verträglichkeitsbedingung an die lokalen Karten κ_i , $i \in I$, an den Elementargrenzen ∂K_i , $i \in I$. Falls K_i und K_j genau eine Seite gemeinsam haben, so besagt die Bedingung (V) , daß die Koordinaten der gemeinsamen Seite $K_i \cap K_j$, die sich durch Restriktion von κ_i bzw. κ_j auf $K_i \cap K_j$ ergeben, bis auf eine affine Transformation übereinstimmen.

(b) Für den Spezialfall, daß S_0 eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist, ist die Bedingung (V) erfüllt, falls für die

Triangulierung $((\kappa_i, K_i))_{i \in I}$ affin äquivalente Elemente zum Referenz-Element gewählt werden, d.h. falls $K_i, i \in I$, euklidische Dreiecke und $\kappa_i, i \in I$, affine Bijektionen sind. Dieser Spezialfall entspricht dem "klassischen" Finite-Element-Verfahren für ebene Gebiete. Die Bedingung (V) ist erfüllt, da in diesem Fall die Abbildungen $\kappa_i^{-1}, \kappa_j^{-1} \circ \alpha$ der euklidischen Strecke $\kappa_i(K_i \cap K_j)$ auf die euklidische Strecke $K_i \cap K_j$ affine Bijektionen sind.

(c) Ist T eine parametrisierte Triangulierung von S_0 und R ein Referenz-Element, so gilt $S_{T,R} \subset H^1(S_0)$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß für jede reguläre lokale Parametrisierung $p: G \rightarrow S_0$ und jedes $u \in S_{T,R}$ gilt $u \circ p \in H^1(G)$. Sei $I' := \{i \in I \mid K_i \cap p(G) \neq \emptyset\}$. Dann ist $\{p^{-1}(\overset{\circ}{K}_i) \mid i \in I'\}$ eine Zerlegung von G in Lipschitz-stetig berandete Teilgebiete. Für $u \in S_{T,R}$ gilt $u \circ p \in C(G)$ und $u \circ p|_{p^{-1}(K_i)} \in H^1(p^{-1}(K_i)), i \in I$. Mit (C.1) folgt $u \circ p \in H^1(G)$. #

Die beiden folgenden Lemmata bereiten den Beweis des nachfolgenden Satzes vor, der eine Abschätzung für den Fehler der Interpolierenden bei parametrisierten Elementen beinhaltet.

3.7 Lemma

Sei R ein Referenz-Element der Ordnung k . Dann existiert ein $C = C(R) > 0$, so daß für alle $v \in H^k(E)$ gilt:

$$\|v - P_R v\|_{1,E} \leq C |v|_{k,E}$$

Beweis:

Ciarlet[78], Theorem 3.1.4

#

3.8 Lemma

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen. Seien $f: U \rightarrow V$ in $a \in U$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ in $b := f(a)$ k -mal differenzierbar. Dann ist $h := g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ in a k -mal differenzierbar, und es gibt eine Konstante $C = C(k) > 0$, die nur von k abhängt, so daß gilt:

$$\|D^k h(a)\| \leq C \sum_{j=1}^k \|D^j g(b)\| \sum_{\underline{i} \in I(j,k)} \|Df(a)\|^{i_1} \cdot \dots \cdot \|D^k f(a)\|^{i_k},$$

wobei $I(j,k) := \{\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid i_1 + \dots + i_k = j; \\ i_1 + 2i_2 + \dots + ki_k = k\}$

Beweis:

Ciarlet/Raviart [72], Lemma 3, S. 227 #

3.9 Bemerkung

Seien die Voraussetzungen wie in Lemma 3.8. Ist f eine affine Abbildung, d.h. es gibt $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = A \cdot x + b$ für alle $x \in U$, so gilt:

$$\|D^k h(a)\| \leq C \|D^k g(b)\| \|A\|^k.$$

Beweis:

Wegen $D^\ell f(a) = 0$ für $\ell \geq 2$, treten als nicht verschwindende Summanden in der Summe $\sum_{j=1}^k \dots$ nur Summanden zu Indices j auf, für die ein $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \in I(j, k)$ existiert mit $i_2 = \dots = i_k = 0$, d.h. $i_1 = j = k$. In $I(k, k)$ wiederum ist $\underline{i} = (k, 0, \dots, 0)$ das einzige Element mit $i_2 = \dots = i_k = 0$. Es folgt:
 $\|D^k h(a)\| \leq C \|D^k g(b)\| \quad \|Df(a)\|^k = C \|D^k g(b)\| \|A\|^k \quad \#$

3.10 Satz

Sei $\sigma: S_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lokale Karte auf S , (κ, K) ein parametrisiertes Dreieck mit $K \subset S_1$ und R ein Referenz-Element der Ordnung k . Dann gilt für $u \in H^k(K)$:

$$\|(u - P_{R, \kappa, K} u) \circ \sigma^{-1}\|_{1, \sigma(K)}^2 \leq C(R) \cdot C_d (1 + C_{-1}^2) C_k^2 \|u \circ \sigma^{-1}\|_{k, \sigma(K)}^2,$$

wobei

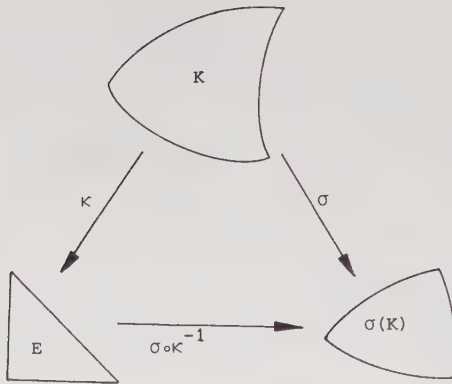
$C(R) > 0$ nur von R abhängt,

$$C_d := \sup_{t \in E} |\det D(\sigma \circ \kappa^{-1})(t)| / \inf_{t \in E} |\det D(\sigma \circ \kappa^{-1})(t)|,$$

$$C_{-1} := \sup_{s \in \sigma(K)} \|D(\kappa \circ \sigma^{-1})(s)\|,$$

$$C_k := \max_{1 \leq j \leq k} \sup_{t \in E} \sum_{\underline{i} \in I(j, k)} \|D(\sigma \circ \kappa^{-1})(t)\|^{i_1} \dots \|D^k(\sigma \circ \kappa^{-1})(t)\|^{i_k}$$

$I(j, k)$ wie in Lemma 3.8.



Beweis:

Es seien

$$g : E \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g := u \circ \kappa^{-1} - p_R(u \circ \kappa^{-1}) \quad ,$$

$$h : \sigma(K) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad h := (u - p_{R, \kappa, K} u) \circ \sigma^{-1} \quad ,$$

$$f : \sigma(K) \rightarrow E \quad , \quad f := \kappa \circ \sigma^{-1}$$

Dann gilt $h = g \circ f$

Anwendung der Transformationsformel für Integrale und die aus der Kettenregel folgende Abschätzung

$$\|Dh(s)\|^2 \leq \|Dg(f(s))\|^2 \|Df(s)\|^2 \quad , \quad s \in \sigma(K) \quad ,$$

liefern für $\ell = 0, 1$:

$$|h|_{\ell, \sigma(K)}^2 \leq \sup_{t \in E} |\det Df^{-1}(t)| \sup_{s \in \sigma(K)} \|Df(s)\|^{2\ell} |g|_{\ell, E}^2 \quad .$$

Es folgt:

$$(1) \quad \|h\|_{1,\sigma(K)}^2 \leq \sup_{t \in E} |\det Df^{-1}(t)| \cdot (1+C_{-1}^2) \|g\|_{1,E}^2$$

Nach Lemma 3.7 gilt:

$$(2) \quad \|g\|_{1,E}^2 \leq C(R) |u \circ \kappa^{-1}|_{k,E}^2.$$

Anwendung von Lemma 3.8 auf $u \circ \kappa^{-1} = (u \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ \kappa^{-1})$

liefert für $t \in E$:

$$\begin{aligned} \|D^k(u \circ \kappa^{-1})(t)\| &\leq C(k) \sum_{j=1}^k \|D^j(u \circ \sigma^{-1})(f^{-1}(t))\| \cdot \\ &\quad \sum_{i \in I(j,k)} \|D(\sigma \circ \kappa^{-1})(t)\|^{i_1} \cdot \dots \cdot \|D^k(\sigma \circ \kappa^{-1})(t)\|^{i_k}. \end{aligned}$$

Mit der Transformationsformel für Integrale folgt:

$$\begin{aligned} (3) \quad |u \circ \kappa^{-1}|_{k,E}^2 &\leq C \int_E \|D^k(u \circ \kappa^{-1})(t)\|^2 dt \\ &\leq C \sup_{s \in \sigma(K)} |\det Df(s)| \cdot C_k^2 \sum_{j=1}^k \int_{\sigma(K)} \|D^j(u \circ \sigma^{-1})(s)\|^2 ds \\ &\leq C \sup_{s \in \sigma(K)} |\det Df(s)| \cdot C_k^2 \|u \circ \sigma^{-1}\|_{k,\sigma(K)}^2. \end{aligned}$$

Wegen $\sup_{s \in \sigma(K)} |\det Df(s)| = \inf_{t \in E} |\det Df^{-1}(t)|$ folgt aus

(1), (2), (3) die Behauptung. #

4. Finite Elemente auf der Sphäre

Es sei S_O ein polygonales Teilgebiet der Sphäre S^2 oder gleich S^2 . Die Konstruktion parametrisierter Triangulierungen $((\kappa_i, K_i))_{i \in I}$ von S_O gemäß Definition 3.3(b) erfordert die explizite Angabe lokaler Karten κ_i mit $\kappa_i(K_i) = E$. Werden die Flächenelemente K_i als sphärische Dreiecke gewählt, um die Erzeugung von Triangulierungen möglichst einfach zu gestalten, so sind lokale Abbildungen der Kugeloberfläche in die Ebene anzugeben, die sphärische Dreiecke auf euklidische Dreiecke abbilden. Unter den explizit bekannten lokalen Abbildungen der Sphäre in die Ebene besitzen lediglich die gnomonischen Projektionen diese Eigenschaft.

4.1 Definition

Sei $D = (d_1, d_2, d_3)$ ein Dreibein. Die Abbildung

$$\gamma_D : \begin{cases} \{x \in S^2 \mid d_3^T \cdot x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto \gamma_D(x) := (d_3^T \cdot x)^{-1} \begin{pmatrix} d_1^T \cdot x \\ d_2^T \cdot x \end{pmatrix} \end{cases}$$

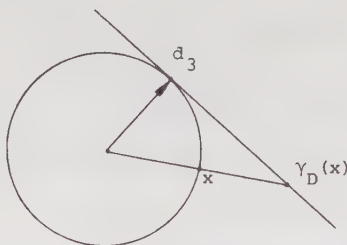
heißt gnomonische Projektion zum Dreibein D .

#

4.2 Bemerkungen

(a) Geometrische Interpretation von γ_D :

γ_D ist die Projektion aus dem Kugelmittelpunkt auf die Tangentialebene im Punkt $d_3 \in S^2$.



γ_D bildet geodätische Linien auf Geraden in der Parameter-ebene ab, also auch sphärische Dreiecke auf euklidische Dreiecke.

(b) Die Umkehrabbildung zu γ_D ist gegeben durch

$$\gamma_D^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \\ (t_1, t_2) \rightarrow (1+t_1^2+t_2^2)^{-1/2} D \cdot (t_1, t_2, 1)^T \end{cases} .$$

Für jede beschränkte Menge $G = \mathring{G} \subset \mathbb{R}^2$ wird durch $\gamma_D^{-1} : G \rightarrow S^2$ eine reguläre lokale Parametrisierung definiert. Die kontravarianten Komponenten der ersten Fundamentalform und das Flächenelement bezüglich γ_D^{-1} ergeben sich für $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ zu:

$$\gamma = \gamma(t_1, t_2) := 1 + t_1^2 + t_2^2, \quad ,$$

$$g^{11} = \gamma(1 + t_1^2), \quad g^{12} = g^{21} = \gamma t_1 t_2, \quad g^{22} = \gamma(1 + t_2^2), \quad ,$$

$$\sqrt{g} = \gamma^{-3/2}$$

#

Ist K ein sphärisches Dreieck mit $K \subset \{x \in S^2 \mid d_3^T \cdot x > 0\}$, so ist $\gamma_D(K)$ ein euklidisches Dreieck, das durch eine affine Abbildung A auf das Einheitsdreieck E abgebildet werden kann. Durch $\kappa := A \circ \gamma_D$ wird dann eine lokale Karte auf S^2 mit $\kappa(K) = E$ definiert.

Bisher wurde an das Dreibein D lediglich die Forderung $K \subset \{x \in S^2 \mid d_3^T \cdot x > 0\}$ gestellt. Ist $T = ((\kappa_i, K_i))_{i \in I}$ eine parametrisierte Triangulierung von S_C mit $\kappa_i = A_i \circ \gamma_{D_i}$ so wird T i.a. die Verträglichkeitsbedingung (V) aus Satz 3.5 nicht erfüllen. Durch spezielle Wahl der Dreibeine $D_i, i \in I$, kann (V) gewährleistet werden. Da bei festem d_3 die ersten beiden Vektoren d_1, d_2 des Dreibeins D bis auf eine Drehung der Parameterebene eindeutig bestimmt sind, ist die Wahl von d_3 von ausschlaggebender Bedeutung.

4.3 Definition

- (a) Ein geodätisches Dreieck $K \subset S^2$ heißt gnomonisch parametrisierbar, kurz GP-Dreieck, wenn ein $z \in S^2$ existiert mit $K \subset K_S(z, \pi/4)$.

(b) Sei $K \subset S^2$ ein GP-Dreieck mit den Ecken x_1, x_2, x_3 .

Dann heißt das Dreibein

$$D(K) := (d_1(K), d_2(K), d_3(K)), \text{ mit}$$

$$d_3(K) := (x_2 - x_1) \times (x_3 - x_1) / \|(x_2 - x_1) \times (x_3 - x_1)\|,$$

$$d_2(K) := \begin{cases} e_2, & \text{falls } d_3 = e_3 \\ e_1, & \text{falls } d_3 = -e_3 \\ (e_3 \times d_3(K)) / \|e_3 \times d_3(K)\|, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$d_1(K) := d_2(K) \times d_3(K)$$

das K zugeordnete Dreibein.

Für die gnomonische Projektion zum Dreibein $D(K)$

schreiben wir kurz $\gamma_K := \gamma_{D(K)} \cdot \#$

4.4 Bemerkungen

Sei K ein GP-Dreieck mit Ecken x_1, x_2, x_3 .

(a) Es gilt $\|\gamma_K(x_1)\| = \|\gamma_K(x_2)\| = \|\gamma_K(x_3)\|$, d.h. der Mittelpunkt des Umkreises von $\gamma_K(K)$ in der Parameterebene liegt stets im Koordinatensprung.

Beweis: Aus der Definition 4.1 von γ_K folgt:

$$\|\gamma_K(x_i)\|^2 = (1 - (d_3(K)^T x_i)^2) (d_3(K)^T x_i)^{-2}.$$

Mit $r := \|(x_2 - x_1) \times (x_3 - x_1)\|^{-1}$ gilt weiter

$$\begin{aligned} d_3(K)^T x_i &= r((x_2 - x_1) \times (x_3 - x_1))^T x_i = \\ &= r \det(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Also ist $\|\gamma_K(x_i)\|$ unabhängig von $i = 1, 2, 3$.

(b) Die Forderung $K \subset K_S(z, \pi/4)$ in 4.3(a) wurde aus beweistechnischen Gründen gestellt. Aus dieser Forderung folgt für den Durchmesser $h_K := \sup \{d_S(x, y) \mid x, y \in K\}$ von K : $h_K \leq \pi/2$. Ferner gilt für das Bild $\gamma_K(K)$ von K in der Parameterebene:

$$\gamma_K(K) \subset K(0, 1) \subset \mathbb{R}^2,$$

dennd der Mittelpunkt des Umkreises von K wird nach (a) unter γ_K auf den Ursprung abgebildet. Somit wird der Umkreis von K auf den Umkreis von $\gamma_K(K)$ abgebildet. Da der Radius des Umkreises von K kleiner als $\pi/4$ ist, folgt, daß der Radius des Umkreises von $\gamma_K(K)$ kleiner als 1 ist.

(c) Die folgende Aussage wird bereitgestellt für den Beweis von Satz 4.6, in dem die Verträglichkeitsbedingung (V) aus Satz 3.5 nachgewiesen wird.

Sei $A: \gamma_K(K) \rightarrow E$ eine affine Bijektion, $\kappa := A \circ \gamma_K$ und $1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$. Dann gilt für $s \in [0, 1]$ und $z := (1-s)\kappa(x_i) + s\kappa(x_j)$:

$$\kappa^{-1}(z) = \frac{(1-s)x_i + sx_j}{\sqrt{1 - 2(1-x_i^T \cdot x_j)(1-s)s}}.$$

Beweis:

Da affine Abbildungen konvexe Kombinationen erhalten, gilt:

$$\begin{aligned} \kappa^{-1}(z) &= \kappa^{-1}((1-s)\kappa(x_i) + s\kappa(x_j)) = \\ &= \gamma_K^{-1}((1-s)\gamma_K(x_i) + s\gamma_K(x_j)) \end{aligned}$$

Sei

$$y(s) := \begin{pmatrix} (1-s)\gamma_K(x_i) + s\gamma_K(x_j) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Im Beweis von (a) wurde gezeigt:

$$c := d_3(K)^T \cdot x_i = d_3(K)^T \cdot x_j > 0$$

wobei wesentlich die Wahl von $d_3(K)$ benutzt wurde.

Nach Definition 4.1 von γ_K erhält man:

$$y(s) = c^{-1} D(K)^T ((1-s)x_i + sx_j) .$$

Die explizite Darstellung von γ_K^{-1} in 4.2(b) liefert:

$$\kappa^{-1}(z) = (y(s)^T \cdot y(s))^{-1/2} D(K) \cdot y(s) .$$

Wegen $y(s)^T \cdot y(s) = c^{-2} (1-2(1-x_i^T \cdot x_j)(1-s)s)$ folgt die Behauptung.

(d) Sei R ein Referenz-Element der Ordnung k . Sind

$A_i : \gamma_K(K) \rightarrow E$, $i = 1, 2$, affine Bijektionen, dann werden durch (κ_i, K) , $\kappa_i = A_i \circ \gamma_K$, $i = 1, 2$, parametrisierte Dreiecke definiert. Für alle $u \in H^k(K)$ gilt:

$$P_{R, \kappa_1, K} u = P_{R, \kappa_2, K} u .$$

Beweis:

Es gilt $A := A_1 \circ A_2^{-1} \in \pi(E)$. Aus der Unisolvenz von R folgt

$P_R(v \circ A) = (P_R v) \circ A$ für $v \in H^k(E)$. Hieraus erhält man:

$$\begin{aligned} P_{R, \kappa_1, K} u &= P_R(u \circ \kappa_1^{-1}) \circ \kappa_1 = P_R(u \circ \gamma_K^{-1} \circ A_1^{-1}) \circ (A_1 \circ \gamma_K) \\ &= P_R(u \circ \gamma_K^{-1} \circ A_2^{-1} \circ A^{-1}) \circ (A \circ A_2 \circ \gamma_K) \end{aligned}$$

$$= P_R(u \circ \gamma_K^{-1} \circ A_2^{-1}) \circ (A_2 \circ \gamma_K) = P_{R, \kappa_2, K} u \quad \#$$

Damit ist gezeigt, daß die Projektionen von u auf die lokalen Ansatzräume $P \circ \kappa_i$, $i=1,2$, von der Wahl der affinen Bijektion A_i unabhängig sind. Dies rechtfertigt die verkürzte Schreibweise:

$$P_{R, K} u := P_{R, \kappa, K} u \quad ,$$

wobei $\kappa := A \circ \gamma_K$ und $A: \gamma_K(K) \rightarrow E$ eine beliebige affine Bijektion sei.

Aus der Unisolvenz von R folgt ferner, daß für

$$f: \kappa_1^{-1}(L) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g: \kappa_1^{-1}(H) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad g(x) \in T_x S^2 \quad , \quad \text{gilt:}$$

$$I_{R, \kappa_1, K}(f, g) \circ \kappa_1 = I_{R, \kappa_2, K}(f, g) \circ \kappa_2 \quad \#$$

Mit den lokalen Karten γ_K kann nun über jeder Triangulierung von S_0 eine parametrisierte Triangulierung definiert werden, die die Verträglichkeitsbedingung (V) erfüllt.

4.5 Definition

Eine Familie von GP-Dreiecken $(K_i)_{i \in I}$, $|I| < \infty$, mit

$\bigcup_{i \in I} K_i = \bar{S}_0$ heißt Triangulierung von S_0 , wenn für

$i, j \in I$, $i \neq j$, der Durchschnitt $K_i \cap K_j$ entweder leer oder eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Seite ist.

#

4.6 Satz

Sei $(K_i)_{i \in I}$, $|I| < \infty$, eine Triangulierung von S_0 .

Für $i \in I$ sei $A_i: \gamma_{K_i}(K_i) \rightarrow E$ eine affine Bijektion und

$\kappa_i := A_i \circ \gamma_{K_i}$. Dann ist durch $T := ((\kappa_i, K_i))_{i \in I}$ eine parametrisierte Triangulierung von S_0 gegeben. Für jedes Referenz-Element R besitzt der Finite-Element-Raum $S_{T,R}$ die Interpolationseigenschaft.

Beweis:

Daß durch T eine parametrisierte Triangulierung von S_0 definiert wird, folgt unmittelbar aus der Konstruktion der κ_i , $i \in I$.

Um die Interpolationseigenschaft nachzuweisen, zeigen wir Bedingung (V) aus Satz 3.5. Seien $i, j \in I$, $i \neq j$, derart, daß K_i und K_j eine gemeinsame Seite mit den Endpunkten x_1, x_2 besitzen. Sei $A \in \pi(E)$ mit $x_k = \kappa_j^{-1}(A(\kappa_i(x_k)))$, $k = 1, 2$. Für $z \in \kappa_i(K_i \cap K_j)$ und $s \in [0, 1]$ mit $z = (1-s)\kappa_i(x_1) + s\kappa_i(x_2)$ folgt dann, da A konvexe Kombinationen erhält:

$$A(z) = (1-s)A(\kappa_i(x_1)) + sA(\kappa_i(x_2)) = (1-s)\kappa_j(x_1) + s\kappa_j(x_2)$$

und mit Bemerkung 4.4(c)

$$\kappa_i^{-1}(z) = \frac{(1-s)x_1 + sx_2}{\sqrt{1-2(1-x_1^T \cdot x_2)(1-s)s}} = \kappa_j^{-1}(A(z)) .$$

Damit ist (V) gezeigt.

#

Das folgende Lemma bereitet den Beweis von Satz 4.9 vor, in dem eine Abschätzung des lokalen Approximationsfehlers gegeben wird. Die stereografischen Projektionen σ_D wurden in Definition 1.1 eingeführt.

4.7 Lemma

Sei $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < \pi$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $C(k, \delta) > 0$, das nur von k und δ abhängt, so daß für jedes Dreibein $D = (d_1, d_2, d_3)$ mit $d_s(d_3, s_0) \geq \delta$ und jedes GP-Dreieck $K \subset \bar{S}_0$ gilt:

$$(a) \quad \forall t \in \gamma_K(K) : \frac{\sqrt{2}}{16} \leq |\det D(\sigma_D \circ \gamma_K^{-1})(t)| \leq (1 - \cos \delta)^{-2} ,$$

$$(b) \quad \max_{1 \leq \ell \leq k} \sup_{t \in \gamma_K(K)} \|D^\ell(\sigma_D \circ \gamma_K^{-1})(t)\| \leq C(k, \delta) ,$$

$$(c) \quad \sup_{s \in \sigma_D(K)} \|D(\gamma_K \circ \sigma_D^{-1})(s)\| \leq 2^{5/2} (1 - \cos \delta)^{-3/2} .$$

Beweis:

Sei $K \subset \bar{S}_0$ ein GP-Dreieck. Nach Definition 1.1 gilt für $x \in S^2 \setminus \{d_3\}$:

$$\sigma_D(x) = (s_1, s_2)^T = (1 - d_3^T \cdot x)^{-1} \begin{pmatrix} d_1^T \cdot x \\ d_2^T \cdot x \end{pmatrix}$$

Für $t = (t_1, t_2)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt nach 4.2(b):

$$\gamma_K^{-1}(t) = (1 + t_1^2 + t_2^2)^{-1/2} D(K) \cdot (t_1, t_2, 1)^T .$$

Für $\sigma_D \circ \gamma_K^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ergibt sich die Darstellung

$$(1) \quad \sigma_D \circ \gamma_K^{-1} = h \circ g_K, \text{ wobei}$$

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{y = (y_1, y_2, y_3)^T \mid \|y\| - y_3 > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y = (y_1, y_2, y_3)^T \rightarrow (\|y\| - y_3)^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{cases},$$

$$g_K : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \rightarrow D^T \cdot D(K) \cdot (t_1, t_2, 1)^T \end{cases}.$$

Nach Bemerkung 4.4(b) gilt:

$$(2) \quad \gamma_K(K) \subset K(0, 1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Wir zeigen:

$$(3) \quad g_K(\gamma_K(K)) \subset D(\delta) := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \|y\| \leq \sqrt{2}, \|y\| - y_3 \geq 1 - \cos \delta\}$$

Für $x \in K \subset S$ gilt: $d_3^T \cdot x \leq \cos \delta$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \|\sigma_D(x)\|^2 &= (1 - d_3^T x)^{-2} (1 - (d_3^T x)^2) = (1 + d_3^T x) / (1 - d_3^T x) \\ &\leq (1 + \cos \delta) / (1 - \cos \delta), \text{ und damit:} \end{aligned}$$

$$(4) \quad 1 \leq 1 + \|\sigma_D(x)\|^2 \leq 2(1 - \cos \delta)^{-1}.$$

Sei $y := g_K(\gamma_K(x))$. Da $D^T D(K)$ orthogonal ist, gilt mit (2)

$$(5) \quad 1 \leq 1 + \|\gamma_K(x)\|^2 = \|y\|^2 \leq 2.$$

Wegen $(\|y\| - y_3)(\|y\| + y_3) = y_1^2 + y_2^2$ gilt:

$$\|h(y)\|^2 = (\|y\| - y_3)^{-2} (y_1^2 + y_2^2) = (\|y\| + y_3) / (\|y\| - y_3).$$

Auflösen nach y_3 ergibt:

$$y_3 = \|y\| (\|h(y)\|^2 - 1) (\|h(y)\|^2 + 1)^{-1}. \text{ Es folgt}$$

$$(6) \quad \|y\| - y_3 = 2\|y\| (\|h(y)\|^2 + 1)^{-1}.$$

Wegen $h(y) = h \circ g_K(\gamma_K(x)) = \sigma_D(x)$ folgt aus (4), (5), (6):

$$1 - \cos \delta \leq \|y\| - y_3.$$

Zusammen mit (5) folgt (3).

Beweis von (a): Sei $t := \gamma_K(x)$, $x \in K$. Wegen (1) gilt:

$$(7) \quad D(\sigma_D \circ \gamma_K^{-1})(t) = Dh(y) \cdot Dg_K(t), \quad y := g_K(t).$$

Für $A \in \mathbb{R}^{3,2}$ sei $A_i \in \mathbb{R}^{2,2}$, $i=1,2,3$, die Untermatrix von

A , die man durch Streichen der i -ten Zeile erhält. Der

Vektor $\det_2 A = (a_1, a_2, a_3)^T$ sei definiert durch $a_i := \det A_i$.

Für $A, B \in \mathbb{R}^{3,2}$ besagt der allgemeine Multiplikationssatz für Determinanten (z.B. Erwe [62], S. 247):

$$\det(A^T \cdot B) = (\det_2 A)^T \cdot \det_2 B.$$

Durch eine längere, aber elementare Rechnung zeigt man:

$$\det_2 Dh(y)^T = -\|y\|^{-1} (\|y\| - y_3)^{-2} I_{-2} \cdot g_K(t),$$

$$\det_2 Dg_K(t) = \sigma I_{-2} \cdot D^T \cdot D(K) \cdot e_3, \text{ wobei}$$

$$I_{-2} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma := \text{sign}(\det(D^T \cdot D(K))).$$

Aus (7) folgt mit (5), (6):

$$\begin{aligned} \det D(\sigma_D \circ \gamma_K^{-1})(t) &= -\sigma \|y\|^{-1} (\|y\| - y_3)^{-2} \\ &= -\frac{\sigma}{4} (1 + \|\sigma_D(x)\|^2)^2 (1 + \|\gamma_K(x)\|^2)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Wegen (2), (4) ergibt sich Behauptung (a).

Beweis von (b): Die Abbildung g_K ist eine affine Abbildung des $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ mit der Matrix:

$$A_K := D^T \cdot D(K) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}.$$

Nach Bemerkung 3.9 folgt für $t \in \gamma_K(K)$, $1 \leq \ell \leq k$:

$$\|D^\ell(\sigma_D \circ \gamma_K^{-1})(t)\| = \|D^\ell(h \circ g_K)(t)\| \leq C(k) \|D^\ell h(g_K(t))\| \|A_K\|^\ell.$$

Da $D^T \cdot D(K)$ orthogonal ist, gilt:

$$\|A_K\| = \sup \{ \|At\| \mid t \in \mathbb{R}^2, \|t\| = 1 \} \leq 1.$$

Wegen (3) folgt:

$$\sup_{t \in \gamma_K(K)} \|D^\ell(\sigma_D \circ \gamma_K^{-1})(t)\| \leq C(k) \sup_{y \in D(\delta)} \|D^\ell h(y)\|.$$

Da $D(\delta)$ eine kompakte Teilmenge des Definitionsbereiches von h ist, gibt es ein $C(\delta) > 0$ mit:

$$\max_{1 \leq \ell \leq k} \sup_{y \in D(\delta)} \|D^\ell h(y)\| \leq C(\delta).$$

Mit $C(k, \delta) := C(k)C(\delta)$ folgt Behauptung (b).

Beweis von (c): Aus Bemerkung 1.2(b) und Definition 4.1 ergibt sich für $\gamma_K \circ \sigma_D^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Darstellung

$$\gamma_K \circ \sigma_D^{-1} = \hat{h} \circ \hat{g}_K, \text{ wobei}$$

$$\hat{h} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{y = (y_1, y_2, y_3)^T \mid y_3 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y \mapsto y_3^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{cases} ,$$

$$\hat{g}_K : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s \mapsto D(K)^T \cdot D(2s_1, 2s_2, s_1^2 + s_2^2 - 1)^T . \end{cases}$$

Für $s \in \sigma_D(K)$ folgt:

$$(8) \quad D(\gamma_K \circ \sigma_D^{-1})(s) = D\hat{h}(y) \cdot D\hat{g}_K(s) \quad , \quad y := \hat{g}_K(s) .$$

Die Eigenwerte der Matrix $D\hat{h}(y)^T \cdot D\hat{h}(y)$ lauten:

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = y_3^2 \quad , \quad \lambda_3 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 .$$

Für den maximalen Eigenwert erhält man:

$$\lambda_{\max} = \|y\|^2 = \|\hat{g}_K(s)\|^2 = (1 + \|s\|^2)^2 .$$

Es folgt:

$$(9) \quad \|D\hat{h}(y)\|^2 = \lambda_{\max} = (1 + \|s\|^2)^2 .$$

Die Eigenwerte der Matrix $D\hat{g}_K(s)^T \cdot D\hat{g}_K(s)$ lauten:

$$\lambda_1 = 4 \quad , \quad \lambda_2 = 4(1 + s_1^2 + s_2^2) .$$

Es folgt:

$$(10) \quad \|D\hat{g}_K(s)\|^2 = 4(1 + \|s\|^2) .$$

Aus (8), (9), (10) ergibt sich mit $x := \sigma_D^{-1}(s)$:

$$\begin{aligned} \|D(\gamma_K \circ \sigma_D^{-1})(s)\|^2 &\leq \|D\hat{h}(y)\|^2 \|D\hat{g}_K(s)\|^2 \\ &\leq 4(1 + \|\sigma_D(x)\|^2)^3 . \end{aligned}$$

Mit Abschätzung (4) folgt:

$$\|D(\gamma_K \circ \sigma_D^{-1})(s)\| \leq 2^{5/2} (1 - \cos \delta)^{-3/2} \quad \#$$

4.8 Definition

Sei $C_w > 0$. Ein GP-Dreieck K genügt der Winkelbedingung mit C_w , falls gilt:

$$d_G(K) \leq C_w \rho_G(K),$$

wobei $d_G(K)$ der Durchmesser von $\gamma_K(K)$ und $\rho_G(K)$ der Durchmesser des Inkreises von $\gamma_K(K)$ seien. $\#$

4.9 Satz

Es sei $D = (d_1, d_2, d_3)$ ein Dreibein mit $d_3 \in S^2 \setminus \bar{S}_0$ und $R = (P, L, H)$ ein Referenz-Element der Ordnung k . Ferner sei $C_w > 0$ vorgegeben.

Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, die nur von R , C_w und $\delta := d_g(d_3, S_0)$ abhängt, so daß für alle GP-Dreiecke $K \in \bar{S}_0$, die der Winkelbedingung 4.8 mit C_w genügen, und alle $u \in H^k(K)$ gilt:

$$\|(u \circ p_{P,K}) \circ \sigma_D^{-1}\|_{1, \sigma_D(K)} \leq C \|u \circ \sigma_D^{-1}\|_{k, \tau_D(K)} h^{k-1},$$

wobei $h := d_G(K)$.

Beweis:

Sei $K \subset \bar{S}_O$ ein GP-Dreieck, das der Winkelbedingung genügt, und $u \in H^k(K)$. Sei $A: \gamma_K(K) \rightarrow E$ eine affine Bijektion, $\kappa := A \circ \gamma_K$. Nach Satz 3.10 gilt für $e := \| (u - p_{R,K} u) \circ \sigma_D^{-1} \|_{1, \sigma_D(K)}^2$ die Abschätzung:

$$(1) \quad e \leq C(R) C_d (1 + C_{-1}^2) C_k^2 \| u \circ \sigma_D^{-1} \|_{k, \sigma_D(K)}^2,$$

wobei $C(R)$ nur von R abhängt und

$$C_d := \sup_{t \in E} | \det D(\sigma_D \circ \kappa^{-1})(t) | / \inf_{t \in E} | \det D(\sigma_D \circ \kappa^{-1})(t) |,$$

$$C_{-1} := \sup_{t \in \sigma_D(K)} \| D(\kappa \circ \sigma_D^{-1})(t) \|,$$

$$C_k := \max_{1 \leq \ell \leq k} \sup_{t \in E} \sum_{i \in I(\ell, k)} \| D(\sigma_D \circ \kappa^{-1})(t) \|^{i_1} \dots \| D^k(\sigma_D \circ \kappa^{-1})(t) \|^{i_k}$$

Wegen $D(\sigma_D \circ \gamma_K^{-1} \circ A^{-1})(t) = D(\sigma_D \circ \gamma_K^{-1})(A^{-1}t) \cdot DA^{-1}$, $t \in E$,

folgt für C_d aus Lemma 4.7(a) die Abschätzung:

$$(2) \quad C_d \leq 2^{7/2} (1 - \cos \delta)^{-2}.$$

Wegen $D(\kappa \circ \sigma_D^{-1})(t) = DA \cdot D(\gamma_K \circ \sigma_D^{-1})(t)$, $t \in \sigma_D(K)$,

folgt für C_{-1} aus Lemma 4.7(c) die Abschätzung:

$$(3) \quad C_{-1} \leq 2^{5/2} (1 - \cos \delta)^{-3/2} \| DA \|.$$

Wegen Bemerkung 3.9 gilt für $1 \leq \ell \leq k$:

$$\| D^\ell(\sigma_D \circ \kappa^{-1})(t) \| \leq C(k) \| D^\ell(\sigma_D \circ \gamma_K^{-1})(A^{-1}(t)) \| \| DA^{-1} \|^{\ell}.$$

Hieraus folgt mit Lemma 4.7(b) und der Definition von $I(\ell, k)$ in Lemma 3.8 die Abschätzung:

$$(4) \quad C_k \leq \max_{1 \leq \ell \leq k} (C(k)^\ell C(k, \delta)^\ell |I(\ell, k)|) \|DA^{-1}\|^k.$$

Wegen (1), (2), (3), (4) existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von R und δ abhängt, mit:

$$(5) \quad e \leq C(1 + \|DA\|^2) \|DA^{-1}\|^{2k} \|u \circ \sigma_D^{-1}\|_{k, \sigma_D(K)}^2.$$

Nach Ciarlet [78], Theorem 3.1.3, S. 120, gilt:

$$\begin{aligned} \|DA\|^2 &\leq 2\rho_G(K)^{-2} \\ \|DA^{-1}\|^2 &\leq d_G(K)^2. \end{aligned}$$

Mit der Winkelbedingung 4.8 folgt:

$$(1 + \|DA\|^2) \leq 1 + 2\rho_G(K)^{-2} \leq (2C_w^2 + d_G(K)^2) d_G(K)^{-2}.$$

Da nach Bemerkung 4.4(b) gilt $d_G(K) \leq 2$, folgt aus (5):

$$e \leq C(2C_w^2 + 4) \|u \circ \sigma_D^{-1}\|_{k, \sigma_D(K)}^2 d_G(K)^{2k-2}.$$

#

Wir haben uns in Abschnitt 4 auf sphärische Flächen beschränkt. Eine Verallgemeinerung auf allgemeinere Flächen kann durch Projektion auf die Sphäre erreicht werden. Ist S_1 eine Fläche, die von einem Punkt y aus "schattenlos und vollständig beleuchtet" werden kann, d.h. die Abbildung $x \mapsto (x-y) / \|x-y\|$ ist ein Diffeomorphismus von S_1 in die Sphäre S^2 , so können durch Triangulierung der Bildfläche auf der Sphäre S^2 und anschließende Übertragung auf S_1 Finite-Element-Räume auf S_1 definiert werden.

III. KONVERGENZTHEORIE

Als Ansatzräume für das Rayleigh-Ritz-Verfahren zur numerischen Lösung von (SEWP) wurden in Abschnitt 4 die sphärischen Finiten Elemente bereitgestellt. Die Fehlerabschätzung für das Rayleigh-Ritz-Verfahren kann gemäß Satz 2.1 auf die Abschätzung des Fehlers der besten Approximierenden an die Eigenfunktionen zurückgeführt werden. In diesem Kapitel wird eine Abschätzung für den Fehler der besten Approximierenden bei sphärischen Finiten Elementen als Ansatzfunktionen gegeben.

In Abschnitt 5 definieren wir den Begriff der (k, α) -regulären Funktion. Durch lokale Projektion der Sphäre in die Ebene zeigen wir, daß die Eigenfunktionen von (SEWP) (k, α) -regulär sind. In Abschnitt 7 beweisen wir Abschätzungen für den Fehler der besten Approximierenden an (k, α) -reguläre Funktionen. Die Abschätzungen werden sowohl für quasi-uniforme wie für lokal verfeinerte Triangulierungen gegeben.

Die Voraussetzungen (AS) und (N) seien generell erfüllt.

5. (k, α) -reguläre Funktionen

Die Menge X_s der singulären Punkte wurde in Abschnitt 1 als die Menge der Punkte aus $\partial S \cup \bigcup_{i=1}^M \partial S_i$ definiert, in denen eine Ecke von ∂S oder ∂S_i , $1 \leq i \leq M$, vorliegt oder in denen die Randbedingung wechselt. Im folgenden sei jedem $x \in X_s$ eine stereografische Projektion σ_x mit Fußpunkt x

zugeordnet; die $\sigma_x, x \in X_S$, sind bis auf Drehungen in der Parameterebene eindeutig bestimmt.

5.1 Definition

Es sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, und $\alpha: X_S \rightarrow \mathbb{R}^+$. Eine Funktion $u: S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (k, α) -regulär, wenn u eine Darstellung der Form

$$u = u_0 + \sum_{x \in X_S} u_x$$

besitzt mit den Eigenschaften:

(a) $u_0 \in C(\bar{S})$; $u_0|_{S_i} \in H^k(S_i)$, $1 \leq i \leq M$;

(b) $u_x \in C(\bar{S}) \cap H^1(S)$, $x \in X_S$;

für $U = \overset{\circ}{U} \subset S$ mit $U \subset S_i$ für ein $i \in \{1, \dots, M\}$ und $d_S(X_S, U) > 0$ gilt: $u_x \in C^k(\bar{U})$;

(c) es existiert ein $r_0 > 0$ mit $K_S(x, r_0) \cap K_S(y, r_0) = \emptyset$ für $x, y \in X_S, x \neq y$, und $\text{trg } u_x \subset K_S(x, r_0), x \in X_S$.

(d) es existiert ein $C_0 > 0$, so daß für alle $x \in X_S$ gilt: für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^2$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq k$, und für alle $t \in \sigma_x(K_S(x, r_0) \cap \bigcup_{i=1}^M S_i)$ gilt:

$$|D^\beta(u_x \circ \sigma_x^{-1})(t)| \leq C_0 \|t\|^{\alpha(x) - |\beta|} |\ln \|t\||^s,$$

$$s := \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha(x) \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \\ 1 & \text{für } \alpha(x) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die Konstanten r_0, C_0 heißen Zerlegungskonstanten.

5.2 Bemerkungen

Es sei $u: S \rightarrow \mathbb{R}$ eine (k, α) -reguläre Funktion.

(a) Die Zerlegungskonstanten r_0, C_0 sind nicht eindeutig bestimmt. Für $r'_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < r'_0 < r_0$ existiert stets eine Zerlegung $u = u'_0 + \sum_{x \in X_S} u'_x$ und ein $C'_0 > 0$, so daß die Bedingungen

5.1(a)-(d) mit r'_0, C'_0 erfüllt sind. Seien dazu $\varphi_x \in C^\infty(\bar{S})$, $x \in X_S$, mit $\text{trg } \varphi_x \subset K_S(x, r'_0)$, $\varphi_x(y) = 1$ für $y \in K_S(x, r'_0/2)$. Dann wird durch $u'_x := u_x \varphi_x$, $u'_0 := u - \sum_{x \in X_S} u'_x$ eine geeignete Zerlegung definiert.

(b) Für X_S gilt entweder $X_S = \emptyset$ oder $|X_S| \geq 2$. Im Fall $|X_S| \geq 2$ gilt für die Konstante r_0 in 5.1(c): $r_0 < \pi/2$. Damit folgt für $\sigma_x(K_S(x, r)) = K(O, \bar{r})$, $0 < r \leq r_0$, $\bar{r} := \tan \frac{r}{2}$, die Abschätzung

$$r/2 \leq \bar{r} \leq \min \{1, r\}.$$

(c) Es sei $\delta > 0$. Dann gilt für $x \in X_S$, $\beta \in \mathbb{N}_0^2$, $|\beta| \leq k$, und $t \in \sigma_x(K_S(x, r_0) \cap \bigcup_{i=1}^M S_i)$:

$$|D^\beta(u_x \circ \sigma_x^{-1})(t)| \leq \frac{C_0}{\delta} \|t\|^{\alpha(x) - |\beta| - \delta}$$

Denn nach (b) gilt: $0 < \|t\| \leq 1$. Wegen $\ln \frac{1}{s} \leq \frac{1}{\delta} s^{-\delta}$, $s \in (0, 1]$, folgt die Ungleichung aus 5.1(d).

Die Vergrößerung der Konstante C_0 auf C_0/δ ist nur im Fall $\alpha(x) \in \mathbb{N}$ nötig.

(d) Für $x \in X_S$ und $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq k$, gelte $\alpha(x) - \ell + 1 > 0$.

Dann gilt für $i \in \{1, \dots, M\}$ mit $x \in \partial S_i$:

$$u_x \circ \sigma_x^{-1} \in H^\ell(\sigma_x(K_S(x, r_0) \cap S_i)).$$

Beweis: Sei $G := \sigma_x(K_S(x, r_0) \cap S_i)$ und $\delta > 0$ mit $\alpha(x) - \ell - \delta + 1 > 0$. Dann folgt aus (b), (c):

$$|u_x \circ \sigma_x^{-1}|_{\ell, G} = \sum_{|\beta|=\ell} \int_G (D^\beta (u_x \circ \sigma_x^{-1})(t))^2 dt_1 dt_2$$

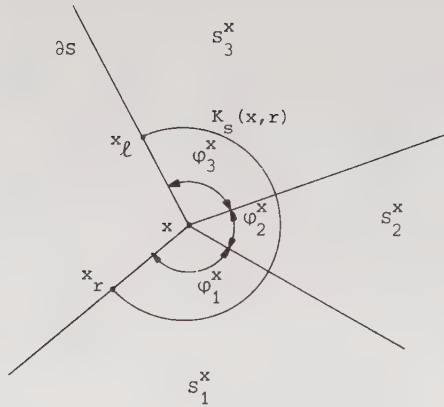
$$\leq 2\pi(\ell+1) \frac{C_0}{\delta} \int_0^1 r^{2(\alpha(x)-\ell-\delta)+1} dr$$

$$= \pi(\ell+1) C_0 / \delta(\alpha(x)-\ell-\delta+1) < \infty \quad \#$$

In Satz 5.5 wird gezeigt, daß die Eigenfunktionen von (SEWP) (k, α) -regulär sind. Für $x \in X_S$ ist die Zahl $\alpha(x)$, die das singuläre Verhalten der Eigenfunktion in der Umgebung von x beschreibt, gleich dem "singulären Exponenten" von x :

5.3 Definition

Es sei $r > 0$ mit $K_S(x, r) \cap K_S(y, r) = \emptyset$ für $x, y \in X_S$, $x \neq y$, derart, daß $K_S(x, r) \cap S$ zusammenhängend ist. Für $x \in X_S$ sei $\{S_j^x \mid 1 \leq j \leq N(x)\}$ die Menge der S_i , $1 \leq i \leq M$, mit $x \in \partial S_i$, wobei die Nummerierung so gewählt sei, daß die $S_j^x \cap K_S(x, r)$, $1 \leq j \leq N(x)$, den Sektor $S \cap K_S(x, r)$ im Gegenuhrzeigersinn zerlegen:



Seien φ_j^x , $1 \leq j \leq N(x)$, die Innenwinkel von S_j^x bei x und p_j^x die Gewichte von S_j^x ; ferner $\psi_0^x := 0$, $\psi_j^x := \sum_{i=1}^j \varphi_i^x$, $1 \leq j \leq N(x)$. Für $\psi_{N(x)}^x < 2\pi$ sei

$$x_r := \partial S_1^x \cap \partial S \cap \partial K_S(x, r), \quad x_\ell := \partial S_{N(x)}^x \cap \partial S \cap \partial K_S(x, r).$$

Es sei λ_1 der kleinste Eigenwert größer null des Eigenwertproblems:

$$\phi \in C[0, \psi_{N(x)}^x], \quad \lambda \in \mathbb{R} :$$

$$p_j^x \phi''(\varphi) + \lambda p_j^x \phi(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (\psi_{j-1}^x, \psi_j^x), \quad 1 \leq j \leq N(x),$$

$$p_j^x \lim_{\varphi \uparrow \psi_j^x} \phi'(\varphi) = p_{j+1}^x \lim_{\varphi \uparrow \psi_j^x} \phi'(\varphi), \quad 1 \leq j \leq N(x)-1,$$

$$\text{falls } \psi_{N(x)}^x = 2\pi : \phi(0) = \phi(2\pi),$$

$$p_1^x \lim_{\varphi \downarrow 0} \phi'(\varphi) = p_{N(x)}^x \lim_{\varphi \downarrow 2\pi} \phi'(\varphi),$$

$$\begin{aligned} \text{falls } \psi_N^x(x) < 2\pi : \quad & \phi(0) = 0, \quad x_r \in \partial S_D, \\ & \phi'(0) = 0, \quad x_r \in \partial S_N, \\ & \phi(\psi_N^x(x)) = 0, \quad x_\ell \in \partial S_D, \\ & \phi'(\psi_N^x(x)) = 0, \quad x_\ell \in \partial S_N. \end{aligned}$$

Der singuläre Exponent $\alpha(x)$ von x ist dann definiert als
 $\alpha(x) := \sqrt{\lambda_1}$.
 #

5.4 Beispiele

(a) Sei $x \in X_S$ mit $N(x) = 1$. Das Eigenwertproblem zur Bestimmung von $\alpha(x)$ lautet:

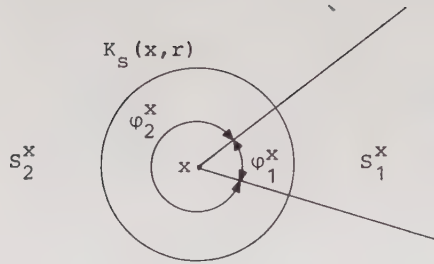
$$\phi''(\varphi) + \lambda \phi(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, \varphi_1^x),$$

mit einer der folgenden Randbedingungen:

- (i) $\phi(0) = 0 = \phi(\varphi_1^x),$
- (ii) $\phi(0) = 0 = \phi'(\varphi_1^x),$
- (iii) $\phi'(0) = 0 = \phi(\varphi_1^x),$
- (iv) $\phi'(0) = 0 = \phi'(\varphi_1^x).$

Für den singulären Exponenten $\alpha(x) = \sqrt{\lambda_1}$ erhält man
 für die Fälle (i), (iv) : $\alpha(x) = \pi/\varphi_1^x,$
 für die Fälle (ii), (iii) : $\alpha(x) = \pi/2\varphi_1^x.$

(b). Sei $x \in X_S$ mit $N(x) = 2$. Die Innenwinkel φ_1^x, φ_2^x
 mögen den Bedingungen $0 < \varphi_1^x < \pi < \varphi_2^x$, $\varphi_1^x + \varphi_2^x = 2\pi$, genügen:



Das Eigenwertproblem zur Bestimmung von $\alpha(x)$ lautet:

$$p_1^x \phi''(\varphi) + \lambda p_1^x \phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \varphi_1^x,$$

$$p_2^x \phi''(\varphi) + \lambda p_2^x \phi(\varphi) = 0, \quad \varphi_1^x < \varphi < 2\pi,$$

$$\phi(0+) = \phi(2\pi-), \quad p_1^x \phi'(0+) = p_2^x \phi'(2\pi-),$$

$$\phi(\varphi_1^{x-}) = \phi(\varphi_1^{x+}), \quad p_1^x \phi'(\varphi_1^{x-}) = p_2^x \phi'(\varphi_1^{x+}).$$

Durch eine längere, aber elementare Rechnung, die in Kellogg [75] ausgeführt ist, erhält man

$$\alpha(x) = \sqrt{\lambda_1} = \min \{\mu_1, \mu_2\},$$

wobei μ_1 die kleinste positive Nullstelle von

$$f_1(s) := p_2^x \cos(s\varphi_1^x/2) \sin(s(2\pi-\varphi_1^x)/2) \\ + p_1^x \sin(s\varphi_1^x/2) \cos(s(2\pi-\varphi_1^x)/2)$$

und μ_2 die kleinste positive Nullstelle von $f_2(s)$ ist,

wobei $f_2(s)$ aus $f_1(s)$ durch Vertauschen von p_1^x und p_2^x entsteht.

Durch Betrachtung der Kurve

$$s \rightarrow (\cos(s\varphi_1^x/2) \sin(s(2\pi-\varphi_1^x)/2), \sin(s\varphi_1^x/2) \cos(s(2\pi-\varphi_1^x)/2))$$

erhält man die Abschätzung

$$\pi / (2\pi - \varphi_1^x) < \alpha(x) < \min \{ \pi / \varphi_1^x, 2\pi / (2\pi - \varphi_1^x) \} ,$$

insbesondere also : $\frac{1}{2} < \alpha(x) < \frac{3}{2}$.

#

5.5 Satz

Es sei $u \in H_R^1$ eine Eigenfunktion von (SEWP).

Dann gilt:

- (a) u ist Lösung des klassischen Eigenwertproblems (EWP).
- (b) Die Funktion $\alpha : X_S \rightarrow \mathbb{R}$ ordne jedem $x \in X_S$ den singulären Exponenten $\alpha(x)$ zu. Dann ist u für $k \geq 2$ eine (k, α) -reguläre Funktion.

Beweis:

Sei $z \in S_i$, $i \in \{1, \dots, M\}$, und $r > 0$ mit $K_S(z, r) \subset S_i$.

Sei σ_z eine stereografische Projektion mit Fußpunkt z .

Nach Definition von (SEWP) und Bemerkung 1.2(b) gilt für

$$v := u \circ \sigma_z^{-1}, \quad G := \sigma_z(K_S(z, r)) :$$

$$\int_G (D_1 v D_1 \varphi + D_2 v D_2 \varphi) ds_1 ds_2 = \lambda \int_G 4\gamma^{-2} v \varphi ds_1 ds_2$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(G)$, wobei $\gamma = \gamma(s_1, s_2) = 1 + s_1^2 + s_2^2$.

Also ist v schwache Lösung von $\Delta v + 4\lambda\gamma^{-2}v = 0$ auf G .

Aus der Hypoelliptizität des Operators $\Delta + 4\lambda\gamma^{-2}$ (z.B.

Lions-Magenes [72], Chap. 2, Theorem 3.2) folgt $v \in C^\infty(G)$

und damit $u \in C^\infty(K_S(z, r))$.

Es verbleibt, das Verhalten von u an den Randpunkten $z \in \partial S \cup \bigcup_{i=1}^M \partial S_i$ zu untersuchen. Durch stereografische Projektion einer Umgebung $K_S(z, r)$ kann die Regularitätsuntersuchung wiederum auf die entsprechenden Probleme für den Δ -Operator auf polygonalen Gebieten im $\mathbb{R}^2$ zurückgeführt werden. Dabei geht wesentlich ein, daß die stereografische Projektion winkeltreu ist, also insbesondere Normalenrichtungen an die Ränder erhalten bleiben.

Beweis von (a) : Nach Ladyženskaja/Ural'tseva [68], Theorem 16.1, folgt $u \in C(\bar{S})$, nach Theorem 16.2 folgt die Transmissionsbedingung (EWP) (b) und die Randbedingung (EWP)(c).

Beweis von (b) : Die (k, α) -Regularität von u folgt nach Kellogg [72], Theorem 1.

#

Bemerkung zum Beweis von 5.5(b) :

In der Arbeit von Kellogg [72] sind keine Beweise angegeben. Nach einer brieflichen Mitteilung wurden die Beweise bisher nicht veröffentlicht. Einige Spezialfälle können aus Ergebnissen anderer Autoren abgeleitet werden. So wird das lokale Verhalten der Lösung an einem singulären Randpunkt $z \in \partial S$, der genau einem der $\bar{S}_i$, $1 \leq i \leq M$, angehört, in Lehman [59] und Wigley [64] untersucht. Gehört der Randpunkt $z \in \partial S$ genau zweien der Teilgebiete $\bar{S}_i$, $1 \leq i \leq M$, an, so finden sich Ergebnisse über das lokale Verhalten von u bei z

in Lemrabet [77]. Für den allgemeinen Fall kann die $(2, \alpha)$ -Regularität der Lösung aus den Ergebnissen in Kellogg [71] abgeleitet werden.

In dieser Arbeit wird die Aussage von Satz 5.5(b) lediglich zur Vorhersage der Konvergenzordnung für die numerischen Beispiele in Abschnitt 10 verwendet werden. #

Der folgende Satz wird für die Beweise der Sätze 7.2 und 7.4 bereitgestellt.

5.6 Satz

Es sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, und $\alpha: X_S \rightarrow \mathbb{R}^+$. Sei $u: S \rightarrow \mathbb{R}$ eine (k, α) -reguläre Funktion mit der Zerlegung $u = u_0 + \sum_{x \in X_S} u_x$ und den Zerlegungskonstanten r_0, C_0 .

Dann existiert für jedes $\delta > 0$ ein $C > 0$, so daß für alle $x \in X_S$ und $i \in \{1, \dots, M\}$ mit $x \in \partial S_i$ gilt:

(a) Für alle $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, $r_1 < r_2 \leq r_0$, gilt mit

$$V(r_1, r_2) := \sigma_x((K_S(x, r_2) \setminus \overline{K_S(x, r_1)}) \cap S_i) :$$

$$\|u_x \circ \sigma_x^{-1}\|_{k, V(r_1, r_2)}^2 \leq C \begin{cases} 1, & \alpha(x) - k + 1 > 0 \\ r_1^{2(\alpha(x) - k + 1 - \delta)}, & \alpha(x) - k + 1 \leq 0 \end{cases}$$

(b) Für alle $h \in \mathbb{R}^+$, $h \leq r_0$, gilt mit

$$W(h) := \sigma_x(K_S(x, h) \cap S_i)$$

$$\|u_x \circ \sigma_x^{-1}\|_{1, W(h)}^2 \leq C h^{2(\alpha(x) - \delta)}$$

Beweis:

Sei $x \in X_S$ und $i \in \{1, \dots, M\}$ mit $x \in \partial S_i$.

Für $0 < r \leq r_0$ gilt nach 5.2(b) :

$$(1) \quad \sigma_x(K_S(x, r)) = K(O, \bar{r}) \subset \mathbb{R}^2, \quad \bar{r} := \tan \frac{r}{2},$$

$$(2) \quad r/2 \leq \bar{r} \leq \min\{1, r\}.$$

Beweis von (a): Seien $0 < r_1 < r_2 \leq r_0$ und $\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ell \leq k$.

Für $\alpha(x) - \ell + 1 > 0$ gilt nach 5.2(d) : $u_x \circ \sigma_x^{-1} \in H^\ell(W(r_0))$.

Es folgt:

$$|u_x \circ \sigma_x^{-1}|_{\ell, V(r_1, r_2)}^2 \leq |u_x \circ \sigma_x^{-1}|_{\ell, W(r_0)}^2.$$

Für $\alpha(x) - \ell + 1 \leq 0$ und $\delta > 0$ gilt nach 5.2(c) und (1), (2):

$$\begin{aligned} |u_x \circ \sigma_x^{-1}|_{\ell, V(r_1, r_2)}^2 &= \sum_{|\beta|=\ell} \int_{V(r_1, r_2)} (D^\beta (u_x \circ \sigma_x^{-1})(t))^2 dt_1 dt_2 \\ &\leq 2\pi(\ell+1) C_0 \delta^{-1} \int_{r_1}^{\bar{r}_2} r^{2(\alpha(x) - \ell - \delta) + 1} dr \\ &\leq \pi(\ell+1) C_0 \delta^{-1} |\alpha(x) - \ell + 1 - \delta|^{-1} \left(\frac{r_1}{2}\right)^{2(\alpha(x) - \ell + 1 - \delta)} \end{aligned}$$

Durch Summation über ℓ , $0 \leq \ell \leq k$, folgt (a).

Beweis von (b): Sei $0 < \delta < \min \{\alpha(x) \mid x \in X_S\}$.

Dann folgt mit 5.2(c) und (1), (2) für $\ell = 0, 1$:

$$|u_x \circ \sigma_x^{-1}|_{\ell, W(h)}^2 \leq \pi(\ell+1) C_O \delta^{-1} (\alpha(x) - \ell + 1 - \delta)^{-1} h^{2(\alpha(x) - \ell + 1 - \delta)}$$

Addition der Abschätzungen für $\ell = 0, 1$ liefert (b).

#

6. Hilfssätze

Die Aussagen dieses Abschnittes werden für die Abschätzung des Approximationsfehlers in Abschnitt 7 bereitgestellt.

6.1 Lemma

Es sei $r > 0$ mit $K_S(x, r) \cap K_S(y, r) = \emptyset$ für $x, y \in X_S$, $x \neq y$, und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $C > 0$, so daß für alle $i \in \{1, \dots, M\}$ und $x \in X_S \cap \bar{S}_i$ gilt:

$$\forall u = \hat{u} \in K_S(x, r) \cap S_i \quad \forall u \in H^k(u) :$$

$$\|u\|_{k, u} \leq C \|u \circ \sigma_x^{-1}\|_{k, \sigma_x(u)} .$$

Beweis:

Sei $i \in \{1, \dots, M\}$ und $x \in X_S \cap \bar{S}_i$. Für $V := K_S(x, r) \cap S_i$ werden durch $\sigma_i^{-1} : \sigma_i(V) \rightarrow S^2$ und $\sigma_x^{-1} : \sigma_x(V) \rightarrow S^2$ reguläre Parametrisierungen definiert. Die Abbildung $\sigma_i \circ \sigma_x^{-1} : \sigma_x(V) \rightarrow \sigma_i(V)$ ist dann ein Diffeomorphismus mit $\sigma_i \circ \sigma_x^{-1} \in C^\infty(\overline{\sigma_x(V)})$, $(\sigma_i \circ \sigma_x^{-1})^{-1} \in C^\infty(\overline{\sigma_i(V)})$ und:

$$0 < C_1 \leq |\det D(\sigma_i \circ \sigma_x^{-1})(t)| \leq C_2, \quad t \in \sigma_x(V).$$

Nach dem Transformationssatz für Sobolew-Räume (z.B. Adams [75], 3.35 Theorem) gibt es dann ein $C > 0$ mit:

$$(1) \quad \|v \circ (\sigma_x \circ \sigma_i^{-1})\|_{k, \sigma_i(V)} \leq C \|v\|_{k, \sigma_x(V)}, \quad v \in H^k(\sigma_x(V)).$$

Mit Definition 1.3(a) von $\|\cdot\|_{k,V}$ folgt:

$$\begin{aligned} \|u\|_{k,V} &= \|u \circ \sigma_i^{-1}\|_{k, \sigma_i(V)} = \|(u \circ \sigma_x^{-1}) \circ (\sigma_x \circ \sigma_i^{-1})\|_{k, \sigma_i(V)} \\ &\leq C \|u \circ \sigma_x^{-1}\|_{k, \sigma_x(V)}. \end{aligned}$$

Für $u = \overset{\circ}{u} \in V$ gilt die analoge Argumentation, wobei die Konstante C in Ungleichung (1) eventuell sogar verkleinert werden kann. Da die Menge der Paare i, x mit $x \in X_S \cap \overline{S}_i$ endlich ist, folgt die Behauptung.

#

6.2 Lemma

Sei $K \subset S^2$ ein GP-Dreieck. Dann gilt:

$$\|D\gamma_K^{-1}(t)\| \leq 1 \quad \text{für alle } t \in \gamma_K(K).$$

Beweis:

Sei $D(K)$ das K zugeordnete Dreibein gemäß Definition

4.3(b) und $t \in \gamma_K(K)$. Die Abbildung $D\gamma_K^{-1}(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\gamma_K^{-1}(t)} S^2$

ergibt sich nach 4.2(b) zu:

$$a = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2 \rightarrow Q(t) \cdot a, \text{ wobei}$$

$$Q(t) := (1+t_1^2+t_2^2)^{-3/2} D(K) \cdot \begin{pmatrix} 1+t_2^2 & -t_1 t_2 \\ -t_1 t_2 & 1+t_1^2 \\ -t_1 & -t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}.$$

Es folgt $\|D\gamma_K^{-1}(t)\| = (\lambda_{\max}(Q(t)^T \cdot Q(t)))^{1/2}$, wobei $\lambda_{\max}(Q(t)^T \cdot Q(t))$ der maximale Eigenwert von $Q(t)^T \cdot Q(t)$ ist. Die Eigenwerte von $Q(t)^T \cdot Q(t)$ ergeben sich als:

$$\lambda_1(t) = (1+t_1^2+t_2^2)^{-2}, \quad \lambda_2(t) = (1+t_1^2+t_2^2)^{-1}.$$

Es folgt: $\|D\gamma_K^{-1}(t)\| = (1+t_1^2+t_2^2)^{-1/2} \leq 1.$ #

6.3 Satz

Sei $R = (P, L, H)$ ein Referenz-Element und $C_w > 0$. Dann gibt es ein $C > 0$, so daß für alle GP-Dreiecke $K \subset \bar{S}$ mit $K \subset \bar{S}_i$ für ein $i \in \{1, \dots, M\}$, die der Winkelbedingung 4.8 mit C_w genügen, gilt:

$$\|v\|_{1,K}^2 \leq C \left(\max_{z \in L(K)} |v(z)|^2 + d_G(K)^2 \max_{z \in H(K)} \|Dv(z)\|^2 \right)$$

für alle $v \in P \circ \kappa$, wobei $\kappa := A \circ \gamma_K$, $A: \gamma_K(K) \rightarrow E$ affine Bijektion, $L(K) := \kappa^{-1}(L)$, $H(K) := \kappa^{-1}(H)$.

Beweis:

Sei $K \subset \bar{S}$ ein GP-Dreieck mit $K \subset \bar{S}_i$ für ein $i \in \{1, \dots, M\}$,

das der Winkelbedingung mit C_w genügt. Die affine Bijektion $A: \gamma_K(K) \rightarrow E$ sei gegeben durch $t \mapsto A(t) := A_O \cdot t + b$, $A_O \in \mathbb{R}^{2,2}$, $b \in \mathbb{R}^2$. Für $v \in P \circ \kappa$ und $\bar{v} := v \circ \kappa^{-1} \in P$ zeigt man analog wie Ungleichung (1) im Beweis von Satz 3.10:

$$\begin{aligned} \|v\|_{1,K}^2 &= \|v \circ \sigma_i^{-1}\|_{1,\sigma_i(K)}^2 \leq \sup_{t \in E} |\det D(\sigma_i \circ \kappa^{-1})(t)| \\ &\quad \cdot (1 + \sup_{s \in \sigma_i(K)} \|D(\kappa \circ \sigma_i^{-1})(s)\|^2) \|\bar{v}\|_{1,E}^2. \end{aligned}$$

Sei $\delta := \sup_{1 \leq i \leq M} d_S(d_3^i, S_i)$. Mit Lemma 4.7 folgt:

$$\begin{aligned} |\det D(\sigma_i \circ \kappa^{-1})(t)| &= |\det D(\sigma_i \circ \gamma_K^{-1})(A^{-1}(t))| |\det A_O^{-1}| \\ &\leq (1 - \cos \delta)^{-2} |\det A_O^{-1}|, \quad t \in E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|D(\kappa \circ \sigma_i^{-1})(s)\| &\leq \|A_O\| \|D(\gamma_K \circ \sigma_i^{-1})(s)\| \\ &\leq 2^{5/2} (1 - \cos \delta)^{-3/2} \|A_O\|, \quad s \in \sigma_i(K). \end{aligned}$$

Es gibt somit ein von K unabhängiges $C > 0$ mit

$$(1) \quad \|v\|_{1,K}^2 \leq C |\det A_O^{-1}| (1 + \|A_O\|^2) \|\bar{v}\|_{1,E}^2.$$

Da P endlich-dimensional ist, gibt es ein $C > 0$ mit

$$(2) \quad \|p\|_{1,E}^2 \leq C \left(\max_{t \in L} |p(t)|^2 + \max_{t \in H} \|Dp(t)\|^2 \right), \quad p \in P.$$

Für $t \in E$ und $z = \kappa^{-1}(t)$ gilt mit Lemma 6.2:

$$\begin{aligned} \|D\bar{v}(t)\|^2 &= \|Dv(z) \cdot D\gamma_K^{-1}(A^{-1}(t)) \cdot A_O^{-1}\|^2 \\ &\leq \|Dv(z)\|^2 \|A_O^{-1}\|^2 . \end{aligned}$$

Aus (1), (2) folgt somit:

$$\begin{aligned} (3) \quad \|v\|_{1,K}^2 &\leq C |\det A_O^{-1}| (1 + \|A_O\|^2) \\ &\quad \cdot \left(\max_{z \in L(K)} |v(z)| + \|A_O^{-1}\|^2 \max_{z \in H(K)} \|Dv(z)\| \right) . \end{aligned}$$

Nach Ciarlet [78], Theorem 3.1.3, gilt

$$\begin{aligned} \|A_O\| &\leq \sqrt{2} \rho_G(K)^{-1} , \quad \|A_O^{-1}\| \leq 4d_G(K) , \\ |\det A_O^{-1}| &= 2 \cdot \text{vol}(\gamma_K(K)) . \end{aligned}$$

Mit der Winkelbedingung 4.8 und 4.4(b) folgt:

$$|\det A_O^{-1}| (1 + \|A_O\|^2) \leq 2 d_G(K)^2 (1 + 2\rho_G(K)^{-2}) \leq 4(2 + C_w^2) .$$

Aus (3) folgt damit die Behauptung.

#

6.4 Lemma

Sei $x \in X_s$. Dann gilt für alle $z \in K_s(x, \pi/2)$:

$$\|D\sigma_x(z)\| < 1 .$$

Beweis:

Sei D_x das zu σ_x gehörige Dreibein, $z \in K_s(x, \pi/2)$ und $s = (s_1, s_2)^T := \sigma_x(z)$. Für $D\sigma_x^{-1}(s) : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_z S^2$ ergibt sich

mit 1.2(b) die Darstellung

$$a = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2 \rightarrow P(s) \cdot a, \text{ wobei}$$

$$P(s) := (1+s_1^2+s_2^2)D_x \cdot \begin{pmatrix} -2s_1^2+2s_2^2+2 & -4s_1s_2 \\ -4s_1s_2 & 2s_1^2-2s_2^2+2 \\ 4s_1 & 4s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$$

$$\text{Wegen } \|D\sigma_x(z)\| = \sup \{ \|D\sigma_x(z) \cdot b\| \mid b \in T_z S^2, \|b\| = 1 \}$$

$$= (\inf \{ \|D\sigma_x^{-1}(s) \cdot a\| \mid a \in \mathbb{R}^2, \|a\| = 1 \})^{-1}$$

$$\text{folgt } \|D\sigma_x(z)\| = (\lambda_{\min}(P(s)^T \cdot P(s)))^{-1/2}.$$

Die Eigenwerte von $P(s)^T \cdot P(s)$ berechnen sich zu:

$$\lambda_1(s) = \lambda_2(s) = 4(1+s_1^2+s_2^2)^{-2}.$$

$$\text{Es folgt: } \|D\sigma_x(z)\| = (1+s_1^2+s_2^2)/2.$$

$$\text{Wegen } z \in K_S(x, \pi/2) \text{ gilt } s_1^2+s_2^2 < 1. \quad \#$$

6.5 Lemma

Sei $x \in S^2$ und $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < \frac{\pi}{2}$. Dann gilt:

$$2r^2 \leq \text{vol}(K_S(x, r)) = 2\pi(1 - \cos r) \leq \pi r^2.$$

Beweis:

Die Gleichung $\text{vol}(K_S(x, r)) = 2\pi(1 - \cos r)$ ist aus der elementaren

Stereometrie bekannt (z.B. Bronstein [71], S. 152). Wegen $r^2/\pi \leq 1 - \cos r \leq r^2/2$, $r \in (0, \pi/2]$, folgt die Behauptung. #

6.6 Lemma

Sei $K \subset S^2$ ein GP-Dreieck. Dann gilt:

$$(a) \quad \text{vol}(K) \geq \rho_G(K)^2,$$

$$(b) \quad d_G(K) \leq \frac{4}{\pi} h_K, \quad h_K := \sup \{d_s(x, y) \mid x, y \in K\}.$$

Beweis:

$$(a) \quad \text{vol}(K) = \int_K d\sigma = \int_{\gamma_K(K)} \sqrt{g} \, dt_1 dt_2. \quad \text{Nach 4.2(b) gilt}$$

$$\sqrt{g} = (1 + t_1^2 + t_2^2)^{-3/2} \quad \text{und nach 4.4(b) : } t_1^2 + t_2^2 < 1. \quad \text{Es folgt}$$

$$\sqrt{g} \geq 2^{-3/2} \quad \text{und somit:}$$

$$\text{vol}(K) \geq 2^{-3/2} \pi \rho_G(K)^2 \geq \rho_G(K)^2.$$

(b) Es gilt $d_G(K)/2 = \tan(h_K/2)$. Nach Definition 4.3(a) gilt $h_K \leq \pi/2$. Wegen $\tan x \leq \frac{4}{\pi} x$, $x \in [0, \pi/4]$, folgt die Behauptung. #

7. Abschätzung des Approximationsfehlers

Es sei $H \subset (0,1)$, $0 \in \bar{H}$, eine Indexmenge und $(T_h)_{h \in H}$ eine Familie von Triangulierungen von S derart, daß für jedes $h \in H$ und $i \in \{1, \dots, M\}$ die Familie $\{K \in T_h \mid K \subset \bar{S}_i\}$ eine Triangulierung von S_i ist. Es gelte für alle $h \in H$:

$$\sup \{h_K := \sup \{d_S(x,y) \mid x,y \in K\} \mid K \in T_h\} \leq h.$$

Es sei $R = (P, L, H)$ ein Referenz-Element der Ordnung k .

Nach Definition 3.1 gilt $k \geq 2$.

Für $h \in H$ und $i \in \{1, \dots, M\}$ sei $S_{h,i}$ der Finite-Element-Raum auf S_i über der Triangulierung $\{K \in T_h \mid K \subset \bar{S}_i\}$ bezüglich des Referenz-Elements R . Der Raum S_h sei erklärt durch:

$$S_h := \{v \in C(\bar{S}) \mid v|_{S_i} \in S_{h,i}, \quad 1 \leq i \leq M; v|_{\partial S_D} = 0\}.$$

Analog wie Bemerkung 3.6(c) zeigt man $S_h \subset H^1(S)$. Mit der Randbedingung $v|_{\partial S_D} = 0$ folgt:

$$S_h \subset H_R^1.$$

Es sei $\alpha : X_S \rightarrow \mathbb{R}^+$ vorgegeben und

$$\alpha_0 := \min \{\alpha(x) \mid x \in X_S\}.$$

Die Abschätzung des Approximationsfehlers wird zuerst für den Fall quasi-uniformer Triangulierungen gegeben.

7.1 Definition

Die Familie $(T_h)_{h \in H}$ heißt quasi-uniform, wenn es Konstante $C_q, C_w > 0$ gibt mit:

- (a) $\forall K \in \bigcup_{h \in H} T_h : d_G(K) \leq C_w \rho_G(K)$
- (b) $\forall h \in H : C_q h \leq \inf \{d_G(K) \mid K \in T_h\} . \quad \#$

7.2 Satz

Es sei $u \in H_R^1$ eine (k, α) -reguläre Funktion, $\gamma := \min \{\alpha_0, k-1\}$ und $(T_h)_{h \in H}$ eine quasi-uniforme Familie von Triangulierungen von S .

Dann existiert für jedes $\delta \in (0, \gamma)$ ein $C = C(\delta, u) > 0$, so daß für alle hinreichend kleinen $h \in H$ gilt:

$$\inf_{v \in S_h} \|u - v\|_1 \leq C h^{\gamma - \delta} .$$

Beweis:

Es sei

$$u = u_0 + \sum_{x \in X_S} u_x$$

eine fest vorgegebene Darstellung von u gemäß Definition 5.1 mit den Zerlegungskonstanten r_0, C_0 . O.B.d.A. werde von r_0 vorausgesetzt, daß $K_S(x, r_0) \cap S$ für alle $x \in X_S$ zusammen-

hängend ist.

Sei $h \in H$, $h < r_0$. Wir definieren eine Interpolierende

$p_h^u \in S_h$ an u :

$$(1) \quad p_h^u := p_h^{u_0} + \sum_{x \in X_S} p_h^u x, \quad ,$$

wobei $p_h^{u_0}$ erklärt sei durch

$$(2) \quad \forall K \in T_h : p_h^{u_0}|_K := p_{R,K}^{u_0}$$

und $p_h^u x$, $x \in X_S$, durch

$$(3) \quad \forall K \in T_h \text{ mit } K \subset \bar{S}_i, \quad 1 \leq i \leq M, \text{ gilt:}$$

$$K \cap K_S(x, h) = \emptyset : \quad p_h^u x|_K := p_{R,K}^{u_x}$$

$$K \cap K_S(x, h) \neq \emptyset : \quad p_h^u x|_K := I_{R,K,K}(f, g) \circ \kappa,$$

wobei $\kappa := A \circ \gamma_K$, $A: \gamma_K(K) \rightarrow E$ affine Bijektion und f, g definiert seien durch:

$$y \in \kappa^{-1}(L) : f(y) := u_x(y)$$

$$y \in \kappa^{-1}(H) : g(y)^T := \begin{cases} D(u_x|_K)(y) & , \quad y \notin K_S(x, h) \\ 0 & , \quad y \in K_S(x, h) \end{cases}$$

(Nach 4.4(d) ist $p_h^u x$ unabhängig von der Wahl von A).

Nach Satz 4.6 folgt $p_h^u|_{S_i} \in S_{h,i}$. Die Verträglichkeitsbedingung (V) aus Satz 3.5 ist auch an den Transmissionslinien $\partial S_i \cap \partial S_j$, $1 \leq i, j \leq M$, $i \neq j$, erfüllt. Daraus folgt wie im Beweis

von Satz 3.5 die Stetigkeit von $p_h u$ auf $\bar{S}$, da die Übereinstimmung der Ableitungen in den Hermiteischen Knoten lediglich in tangentialer Richtung der gemeinsamen Kante benötigt wird. Nach Konstruktion von $p_h u$ gilt:

$p_h u|_{\partial S_D} = u|_{\partial S_D} = 0$. Somit gilt:

$$p_h u \in S_h.$$

Wegen $\|u - p_h u\|_1^2 = \sum_{i=1}^M \|u - p_h u\|_{1, S_i}^2$ genügt es zu zeigen, daß ein $C > 0$, unabhängig von h , existiert mit:

$$(4) \quad \|u - p_h u\|_{1, S_i}^2 \leq C h^{2(\gamma-\delta)}, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Sei $i \in \{1, \dots, M\}$ fest gewählt.

Zerlegung des Fehlers in "regulären" und "singulären" Teil:

$$(5) \quad \|u - p_h u\|_{1, S_i}^2 \leq (|X_S \cap \bar{S}_i| + 1) (\|u - p_h u\|_{1, S_i}^2 + \sum_{x \in X_S \cap \bar{S}_i} \|u_x - p_h u_x\|_{1, S_i}^2)$$

Abschätzung des "regulären" Fehlerterms:

Für $K \in T_h$, $K \subset \bar{S}_i$, gilt nach Satz 4.9 und Lemma 6.6(b):

$$\|u - p_h u\|_{1, K}^2 \leq C \|u\|_{k, K}^2 h^{2k-2}$$

Summation über K liefert:

$$(6) \quad \|u - p_h u\|_{1, S_i}^2 \leq C \|u\|_{1, S_i}^2 h^{2k-2}$$

Abschätzung der "singulären" Fehlerterme:

Sei $x \in X_S \cap \bar{S}_i$ fest gewählt. Wir definieren:

$$u_h' := K_S(x, h) \cap S_i ,$$

$$V_h' := (K_S(x, r_0) \cap S_i) \setminus \bar{u}_h' ,$$

$$u_h := \bigcup \{ K \in T_h \mid K \cap u_h' \neq \emptyset \} ,$$

$$V_h := \bigcup \{ K \in T_h \mid K \cap u_h' = \emptyset , K \cap V_h' \neq \emptyset \} .$$

Wegen $\text{trg } u_x \subset K_S(x, r_0)$ gilt

$$(7) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1, S_i}^2 = \|u_x - p_h u_x\|_{1, u_h}^2 + \|u_x - p_h u_x\|_{1, V_h}^2$$

Abschätzung von $\|u_x - p_h u_x\|_{1, V_h}^2$:

Wegen $u_x \in H^k(V_h)$ folgt nach Satz 4.9:

$$(8) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1, V_h}^2 \leq C \|u_x\|_{k, V_h}^2 h^{2k-2}$$

I. a. gilt $u_x \notin H^k(K_S(x, r_0))$ und somit $\|u_x\|_{k, V_h}^2 \rightarrow \infty$ für $h \rightarrow 0$.

Wir werden im folgenden das Wachstum von $\|u_x\|_{k, V_h}^2$ durch einen Ausdruck in h abschätzen.

Wegen $V_h \cap \text{trg } u_x \subset V_h'$ gilt:

$$\|u_x\|_{k, V_h}^2 \leq \|u_x\|_{k, V_h'}^2$$

Nach Lemma 6.1 gilt:

$$\|u_x\|_{k, V_h'}^2 \leq C \|u_x \circ \sigma_x^{-1}\|_{k, \sigma_x(V_h')}^2$$

Nach Satz 5.6(a) folgt:

$$\|u_x\|_{k, V_h}^2 \leq C \begin{cases} 1 & , \alpha(x) - k + 1 > 0 \\ h^{2(\alpha(x) - k + 1 - \delta)} & , \alpha(x) - k + 1 \leq 0 \end{cases} .$$

Einsetzen in (8) liefert:

$$\|u_x - p_h u_x\|_{1, V_h}^2 \leq C \begin{cases} h^{2k-2} & , \alpha(x) > k-1 \\ h^{2(\alpha(x) - \delta)} & , \alpha(x) \leq k-1 \end{cases}$$

Es folgt:

$$(9) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1, V_h}^2 \leq C h^{2(\gamma - \delta)}$$

Abschätzung von $\|u_x - p_h u_x\|_{1, U_h}^2$:

Es gilt:

$$(10) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1, U_h}^2 \leq 2(\|u_x\|_{1, U_h}^2 + \|p_h u_x\|_{1, U_h}^2)$$

Nach Lemma 6.1 und Satz 5.6 gilt wegen $U_h \subset K_S(x, 2h) \cap S_i$

$$\begin{aligned} (11) \quad \|u_x\|_{1, U_h}^2 &\leq C \|u_x \circ \sigma_x^{-1}\|_{1, \sigma_x(K_S(x, 2h) \cap S_i)}^2 \\ &\leq C h^{2(\alpha(x) - \delta)} \leq C h^{2(\gamma - \delta)} \end{aligned}$$

Nach Satz 6.3 gilt für $K \in T_h$, $K \subset U_h$:

$$(12) \quad \|p_h u_x\|_{1,K}^2 \leq C \left(\max_{z \in L(K)} |p_h u_x(z)|^2 + h_K^2 \max_{z \in H(K)} \|D p_h u_x(z)\|^2 \right)$$

Nach Definition von $p_h u_x$ und 5.2(c) folgt:

$$|p_h u_x(z)|^2 = |u_x(z)|^2 = |u_x \circ \sigma_x^{-1}(\sigma_x(z))|^2 \leq C \|\sigma_x(z)\|^{2(\alpha(x)-\delta)}$$

Wegen $\|\sigma_x(z)\| = \tan(d_S(x,z)/2) \leq \tan h \leq Ch$ folgt:

$$(13) \quad \max_{z \in L(K)} |p_h u_x(z)|^2 \leq C h^{2(\alpha(x)-\delta)}.$$

Nach Definition von $p_h u_x$ gilt für $z \in K_S(x,h)$:

$$\|D p_h u_x(z)\| = 0.$$

Für $z \in U_h \setminus K_S(x,h)$ gilt $C_1 h \leq \|\sigma_x(z)\| \leq C_2 h$ und damit nach Definition 5.1 und Lemma 6.4:

$$\begin{aligned} \|D p_h u_x(z)\| &= \|D(u_x|_{S_i})(z)\| \\ &= \|D(u_x \circ \sigma_x^{-1})(\sigma_x(z)) \cdot D\sigma_x(z)\| \\ &\leq \|D(u_x \circ \sigma_x^{-1})(\sigma_x(z))\| \leq C \|\sigma_x(z)\|^{2(\alpha(x)-1-\delta)} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$(14) \quad h_K^2 \max_{z \in H(K)} \|D p_h u_x(z)\|^2 \leq C h^{2(\gamma-\delta)}$$

Mit (13), (14) folgt aus (12) :

$$(15) \quad \|p_h u_x\|_{1,K}^2 \leq C h^{2(\gamma-\delta)}, \quad K \in T_h, \quad K \subset U_h.$$

Für $K \in T_h$ gilt nach Lemma 6.6 und Definition 7.1 :

$$\text{vol}(K) \geq \rho_G(K)^2 \geq C_w^{-2} d_G(K)^2 \geq C_q^2 C_w^{-2} h^2$$

Wegen Lemma 6.5 gilt:

$$\text{vol}(U_h) \leq \text{vol}(K_S(x, 2h)) \leq 4\pi h^2.$$

Somit ist die Anzahl der Elemente in U_h unabhängig von h beschränkt. Es folgt aus (15) :

$$(16) \quad \|p_h u_x\|_{1,U_h}^2 \leq C h^{2(\gamma-\delta)}.$$

Aus (11) und (16) folgt:

$$(17) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1,U_h}^2 \leq C h^{2(\gamma-\delta)}$$

Aus (9) und (17) folgt wegen (7):

$$(18) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1,S_1}^2 \leq C h^{2(\gamma-\delta)}$$

Mit (6) folgt (5) und damit (4).

#

Im allgemeinen gilt $\alpha_0 \leq 1$ (vgl. die Beispiele 5.4). Gemäß Satz 7.2 kann in diesem Fall durch Verwendung eines Referenzelements R mit hoher Ordnung k bei quasi-uniformen Triangulierungen die Konvergenzordnung nicht über α_0 gesteigert werden. Um höhere Konvergenzordnungen zu erreichen, muß der Einfluß der singulären Randpunkte X_S eingeschränkt

werden. Eine geeignete Methode hierfür sind lokale Gitterverfeinerungen in Umgebungen der singulären Randpunkte. In Satz 7.4 wird eine Abschätzung des Approximationsfehlers für Triangulierungen gegeben, die gemäß der folgenden Definition lokal verfeinert sind.

Für $x \in S^2$, $K \in S^2$ sei $D(K, x) := \sup \{d_g(y, x) \mid y \in K\}$.

7.3 Definition

Sei $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_0 < \omega \leq k-1$ und $r_0 \in \mathbb{R}^+$. Die Familie $(T_h)_{h \in H}$ heißt verfeinert zur Ordnung ω mit Radius r_0 , wenn es $C_1, C_2, C_q, C_w > 0$ gibt mit:

$$(a) \quad \forall K \in \bigcup_{h \in H} T_h : d_G(K) \leq C_w \rho_G(K),$$

(b) Für $x \in X_S$ mit $\alpha(x) < \omega$ gilt:

$$\forall h \in H \quad \forall K \in T_h : D(K, x) \leq r_0 \Rightarrow$$

$$C_1 h^{\omega/\alpha(x)} \leq h_K \leq C_2 h^{\omega/(k-1)} D(K, x)^{1-\alpha(x)/(k-1)},$$

(c) Für $x \in X_S$ mit $\alpha(x) \geq \omega$ gilt:

$$\forall h \in H \quad \forall K \in T_h : D(K, x) \leq r_0 \Rightarrow C_q h \leq d_G(K)$$

#

7.4 Satz

Es sei $u \in H_R^1$ eine (k, α) -reguläre Funktion und $\omega \in \mathbb{R}$ mit

$\alpha_0 < \omega \leq k-1$. Es sei $r_0 > 0$ mit $K_S(x, r_0) \cap K_S(y, r_0) = \emptyset$ für $x, y \in X_S$, $x \neq y$, derart gewählt, daß $K_S(x, r_0) \cap S$ für alle $x \in X_S$ zusammenhängend ist. Sei ferner $(T_h)_{h \in H}$ eine zur Ordnung ω verfeinerte Familie von Triangulierungen von S mit Radius r_0 .

Dann existiert für jedes $\delta \in (0, \omega)$ ein $C = C(\delta, \omega) > 0$, so daß für alle hinreichend kleinen $h \in H$ gilt:

$$\inf_{v \in S_h} \|u - v\|_1 \leq C h^{\omega - \delta}$$

Beweis:

Es sei

$$u = u_0 + \sum_{x \in X_S} u_x$$

eine fest vorgegebene Darstellung von u gemäß Definition 5.1 mit den Zerlegungskonstanten r'_0, C_0 . Für r'_0 gelte o.B.d.A. $r'_0 \leq r_0$. Es sei

$$(1) \quad C_3 := \max \{ (2C_2)^{(k-1)/\alpha(x)} \mid x \in X_S, \alpha(x) < \omega \}.$$

Sei $h \in H$ mit :

$$(2) \quad 4C_3 h^{\omega/\alpha(x)} \leq r_0, \quad x \in X_S.$$

Für $x \in X_S$ mit $\alpha(x) < \omega$ sei $L(x) \in \mathbb{N}$ definiert durch:

$$(3) \quad r_0 2^{-L(x)} \leq 4C_3 h^{\omega/\alpha(x)} \leq r_0 2^{-L(x)+1}.$$

Für $x \in X_S$ sei

$$(4) \quad W(x, h) := \begin{cases} K_S(x, h) & , \quad \alpha(x) \geq \omega \\ K_S(x, r_0 2^{-L(x)-1}) & , \quad \alpha(x) < \omega \end{cases} .$$

Wir definieren eine Interpolierende $p_h u \in S_h$ an u :

$$(5) \quad p_h u := p_h u_0 + \sum_{x \in X_S} p_h u_x ,$$

wobei $p_h u_0$ erklärt sei durch

$$(6) \quad \forall K \in T_h : p_h u_0|_K = P_{R,K} u_0$$

und $p_h u_x$, $x \in X_S$, durch

$$(7) \quad \forall K \in T_h \text{ mit } K \subset \bar{S}_i, \quad 1 \leq i \leq M, \text{ gilt:}$$

$$K \cap W(x, h) = \emptyset : p_h u_x|_K := P_{R,K} u_x ;$$

$$K \cap W(x, h) \neq \emptyset : p_h u_x|_K := I_{R,\kappa,K}(f, g) \circ \kappa ,$$

wobei $\kappa := A \circ \gamma_K$, $A : \gamma_K(K) \rightarrow E$ affine Bijektion,

und f, g definiert seien durch:

$$y \in \kappa^{-1}(L) : f(y) := u_x(y)$$

$$y \in \kappa^{-1}(H) : g(y)^T := \begin{cases} D(u_x|_K)(y) & , \quad y \notin W(x, h) \\ 0 & , \quad y \in W(x, h) \end{cases} .$$

Analog wie im Beweis von Satz 7.2 sieht man $p_h u \in S_h$.

Es genügt zu zeigen, daß ein $C > 0$, unabhängig von h , existiert mit:

$$(8) \quad \|u - p_h u\|_{1, S_i}^2 \leq C h^{2(\omega - \delta)} \quad , \quad 1 \leq i \leq M$$

Sei $i \in \{1, \dots, M\}$ fest gewählt. Wir zerlegen den Fehler in "regulären" und "singulären" Teil:

$$(9) \quad \|u - p_h u\|_{1, S_i}^2 \leq (|X_S \cap \bar{S}_i| + 1) \|u - p_h u_0\|_{1, S_i}^2 + \sum_{x \in X_S \cap \bar{S}_i} \|u - p_h u_x\|_{1, S_i}^2$$

Abschätzung des "regulären" Fehlerterms:

Analog wie im Beweis von 7.2 erhält man

$$(10) \quad \|u_0 - p_h u_0\|_{1, S_i}^2 \leq C \|u_0\|_{1, S_i}^2 h^{2k-2}$$

Abschätzung der "singulären" Fehlerterme:

Sei $x \in X_S \cap \bar{S}_i$ fest gewählt.

Für $\alpha(x) \geq \omega$ folgt analog wie Abschätzung (18) im Beweis von Satz 7.2:

$$(11) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1, S_i}^2 \leq C h^{2(\omega - \delta)}$$

Sei $\alpha(x) < \omega$. Definiere

$$V'_\ell := \{y \in S_i \mid r_0 2^{-\ell} < d_S(x, y) \leq r_0 2^{-\ell+1}\} \quad , \quad \ell \in \mathbb{N},$$

$$U'_h := K_S(x, r_0 2^{-L(x)}) \cap S_i \quad ,$$

$$V_\ell := \bigcup \{K \in \mathcal{K}_h \mid K \subset \bar{S}_i, K \cap V'_\ell \neq \emptyset, K \cap V'_{\ell+1} = \emptyset\} \quad ,$$

$$1 \leq \ell \leq L(x) + 1 \quad ,$$

$$u_h := \bigcup \{K \in T_h \mid K \in \bar{S}_1, K \in \overline{U_h' \setminus V_{L(x)+1}}\}.$$

Für alle $K \in T_h$ sei $d(K, x) := \inf \{d_S(y, x) \mid y \in K\}$.

Es gilt dann: $d(K, x) \geq D(K, x) - h_K$.

Nach Definition 7.3(b) folgt:

$$d(K, x) \geq D(K, x) (1 - C_2 h^{\omega/(k-1)} D(K, x)^{-\alpha(x)/(k-1)}) .$$

Für $D(K, x) > r_0 2^{-L(x)-1}$ gilt wegen (3):

$$d(K, x) > C_3 h^{\omega/\alpha(x)} .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} d(K, x) &> D(K, x) (1 - C_2 h^{\omega/(k-1)} C_3^{-\alpha(x)/(k-1)} h^{-\omega/(k-1)}) \\ &= D(K, x) (2 - 2C_2 C_3^{-\alpha(x)/(k-1)}) / 2 \end{aligned}$$

Nach Definition (1) von C_3 ergibt sich:

$$d(K, x) > D(K, x) / 2, \text{ falls } D(K, x) > r_0 2^{-L(x)-1}$$

Für $K \in V_\ell$, $2 \leq \ell \leq L(x)+1$, folgt:

$$D(K, x) < 2d(K, x) \leq 2r_0 2^{-\ell+1} = r_0 2^{-\ell+2}, \text{ d.h.}$$

$$(12) \quad V_\ell \subset V_\ell' \cup V_{\ell-1}' .$$

Aus der Definition der Mengen V_ℓ , $1 \leq \ell \leq L(x)+1$, und u_h liest man ab, daß ihre Vereinigung die Menge $S_1 \cap \text{trg}(u_x - p_h u_x)$ überdeckt. Es folgt:

$$(13) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1, S_1}^2 \leq \|u_x - p_h u_x\|_{1, u_h}^2 + \sum_{\ell=1}^{L(x)+1} \|u_x - p_h u_x\|_{1, V_\ell}^2$$

Abschätzung von $\|u_x - p_h u_x\|_{1,V_1}^2$:

Für $K \in V_1$ gilt nach Satz 4.9 und Lemma 6.6(b) :

$$\|u_x - p_h u_x\|_{1,K}^2 \leq C \|u_x\|_{k,K}^2 h^{2k-2}$$

Summation über $K \in T_h$, $K \in V_1$, liefert:

$$\|u_x - p_h u_x\|_{1,V_1}^2 \leq C \|u_x\|_{k,V_1}^2 h^{2k-2} \leq C \|u_x\|_{k,V_1}^2 h^{2k-2}$$

Da $\|u_x\|_{k,V_1}^2$ unabhängig von h ist, folgt:

$$(14) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1,V_1}^2 \leq C h^{2k-2}$$

Abschätzung von $\|u_x - p_h u_x\|_{1,V_\ell}^2$, $2 \leq \ell \leq L(x)+1$:

Sei $2 \leq \ell \leq L(x)+1$. Für $K \in V_\ell$ gilt wegen (12) und Definition 7.3(b) :

$$h_K \leq C_2 h^{\omega/(k-1)} (r_0 2^{-\ell+2})^{1-\alpha(x)/(k-1)}$$

Mit Satz 4.9 folgt:

$$\begin{aligned} \|u_x - p_h u_x\|_{1,K}^2 &\leq C \|u_x\|_{k,K}^2 h_K^{2k-2} \\ &\leq C \|u_x\|_{k,K}^2 h^{2\omega} 2^{-2(\ell-2)(k-1-\alpha(x))} \end{aligned}$$

Summation über $K \in T_h$, $K \in V_\ell$, ergibt mit (12) :

$$\|u_x - p_h u_x\|_{1,V_\ell}^2 \leq C \|u_x\|_{k,V_\ell \cup V_{\ell-1}}^2 h^{2\omega} 2^{-2(\ell-2)(k-1-\alpha(x))}$$

Nach Satz 5.6 gilt:

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{k, V_\ell^{UV}}^2 &\leq C (r_0 2^{-\ell})^{2(\alpha(x) - k + 1) - \delta \alpha(x) / \omega} \\ &\leq C 2^{2\ell(k-1-\alpha(x))} 2^{\ell \delta \alpha(x) / \omega} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \|u_x - p_h u_x\|_{1, V_\ell}^2 &\leq C h^{2\omega} 2^{4(k-1-\alpha(x))} 2^{\ell \delta \alpha(x) / \omega} \\ &\leq C h^{2\omega} 2^{\ell \delta \alpha(x) / \omega} \end{aligned}$$

Wegen $\ell \leq L(x) + 1$ und (3) gilt:

$$2^{\ell \delta \alpha(x) / \omega} \leq 2^{(L(x) + 1) \delta \alpha(x) / \omega} \leq C 2^{(L(x) - 1) \delta \alpha(x) / \omega} \leq C h^{-\delta}$$

Es folgt:

$$(15) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1, V_\ell}^2 \leq C h^{2\omega - \delta}, \quad 2 \leq \ell \leq L(x) + 1$$

Wegen (3) gilt: $2^{-L(x)} \geq C h^{\omega/\alpha(x)}$.

Es folgt, daß es von h unabhängige Konstante $c, d > 0$ gibt mit:

$$L(x) \leq c + d \ln \frac{1}{h}$$

Es gibt dann eine von h unabhängige Konstante C mit

$$(16) \quad L(x) + 1 \leq C h^{-\delta}.$$

Aus (14), (15), (16) folgt:

$$(17) \quad \sum_{\ell=1}^{L(x)+1} \|u_x - p_h u_x\|_{1, V_\ell}^2 \leq C h^{2(\omega - \delta)}$$

Abschätzung von $\|u_x - p_h u_x\|_{1, u_h}^2$

Es gilt:

$$(18) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1, u_h}^2 \leq 2 (\|u_x\|_{1, u_h}^2 + \|p_h u_x\|_{1, u_h}^2)$$

Wegen Lemma 6.1 und Satz 5.6 gilt wegen $u_h \in \bar{u}_h' \cap \bar{S}_1$:

$$\begin{aligned} (19) \quad \|u_x\|_{1, u_h}^2 &\leq C \|u_x \circ \sigma_x^{-1}\|_{1, \sigma_x(u_h' \cap S_1)}^2 \\ &\leq C (r_0 2^{-L(x)})^{2(\alpha(x) - \delta \alpha(x)/\omega)} \\ &= C (r_0 2^{-L(x)})^{2(\omega - \delta)\alpha(x)/\omega} \end{aligned}$$

Wegen (3) folgt:

$$(20) \quad \|u_x\|_{1, u_h}^2 \leq C h^{2(\omega - \delta)}$$

Nach Satz 6.3 gilt für $K \in T_h$, $K \subset u_h$:

$$(21) \quad \|p_h u_x\|_{1, K}^2 \leq C \left(\max_{z \in L(K)} |p_h u_x(z)|^2 + h_K^2 \max_{z \in H(K)} \|D p_h u_x(z)\|^2 \right)$$

Nach Definition von $p_h u_x$ und Definition 5.1 folgt:

$$\begin{aligned} |p_h u_x(z)|^2 &= |u_x(z)|^2 = |u_x \circ \sigma_x^{-1}(\sigma_x(z))|^2 \\ &\leq C \|\sigma_x(z)\|^{2(\alpha(x) - \delta \alpha(x)/\omega)} \end{aligned}$$

Für $z \in L(K) \subset K \subset u_h$ gilt $\|\sigma_x(z)\| \leq C r_0 2^{-L(x)}$

Mit (3) folgt:

$$(22) \quad |p_h u_x(z)|^2 \leq C(r_0 2^{-L(x)})^{2(\omega-\delta)\alpha(x)/\omega} \leq C h^{2(\omega-\delta)}$$

Nach Definition von $p_h u_x$ gilt für $z \in K_S(x, r_0 2^{-L(x)-1})$:

$$\|D p_h u_x(z)\| = 0.$$

Für $z \in U_h \setminus K_S(x, r_0 2^{-L(x)-1}) \subset \overline{U}_h$ gilt:

$$C_4 r_0 2^{-L(x)-1} \leq \|\sigma_x(z)\| \leq C_5 r_0 2^{-L(x)}$$

Wegen Lemma 6.4 und Definition 5.1 folgt:

$$\begin{aligned} (23) \quad \|D p_h u_x(z)\| &= \|D(u_x|_{S_1})(z)\| \\ &= \|D(u_x \circ \sigma_x^{-1})(\sigma_x(z)) \cdot D\sigma_x(z)\| \\ &\leq \|D(u_x \circ \sigma_x^{-1})(\sigma_x(z))\| \leq C \|\sigma_x(z)\|^{2(\alpha(x)-1-\delta\alpha(x)/\omega)} \\ &\leq C(r_0 2^{-L(x)})^{2(\omega-\delta)\alpha(x)/\omega} (r_0 2^{-L(x)})^{-2} \end{aligned}$$

Nach Definition 7.3(b) gilt:

$$\begin{aligned} h_K &\leq C_2 h^{\omega/(k-1)} D(K, x)^{1-\alpha(x)/(k-1)} \\ &\leq C h^{\omega/(k-1)} (r_0 2^{-L(x)})^{1-\alpha(x)/(k-1)} \\ &\leq C 2^{-L(x)} (h^{\omega} 2^{L(x)\alpha(x)})^{1/(k-1)} \end{aligned}$$

Mit (3) folgt:

$$h_K \leq C 2^{-L(x)} (r_0/2C_3)^{\alpha(x)/(k-1)} \leq C 2^{-L(x)}$$

und hieraus

$$(r_0 2^{-L(x)})^{-2} \leq C h_K^{-2}$$

Zusammen mit (3) folgt aus (23):

$$(24) \quad \|D p_h u_x(z)\| \leq C h^{2(\omega-\delta)} h_K^{-2}.$$

Mit (22), (24) folgt aus (21) für $K \in T_h$, $K \subset U_h$:

$$(25) \quad \|p_h u_x\|_{1,K}^2 \leq C h^{2(\omega-\delta)}$$

Für $K \in T_h$, $K \subset U_h$, folgt mit Lemma 6.6 und Definition 7.3(a), (b):

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &\geq \rho_G(K)^2 \geq C_w^{-2} d_G(K)^2 \geq C h_K^2 \\ &\geq C h^{2\omega/\alpha(x)} \end{aligned}$$

Mit Lemma 6.5 und (3) erhält man:

$$\begin{aligned} \text{vol}(U_h) &\leq \text{vol}(U_h') \leq \text{vol}(K_S(x, r_0 2^{-L(x)})) \\ &\leq \pi (r_0 2^{-L(x)})^2 \leq C h^{2\omega/\alpha(x)} \end{aligned}$$

Somit ist die Anzahl der Dreiecke in U_h unabhängig von h beschränkt. Es folgt aus (25):

$$(26) \quad \|p_h u_x\|_{1,U_h}^2 \leq C h^{2(\omega-\delta)}$$

Mit (20) und (26) folgt aus (18):

$$(27) \quad \|u_x - p_h u_x\|_{1,U_h}^2 \leq C h^{2(\omega-\delta)}$$

Mit (17) und (27) folgt aus (13):

$$(28) \quad \|u_x - P_h u_x\|_{1,S_1}^2 \leq C h^{2(n-1)}$$

Mit (10) folgt aus (9) und (8) die Behauptung.

7.5 Bemerkungen

(a) Aus den Sätzen 7.1 und 7.2 bzw. 7.4 erhält man Abschätzungen für die Konvergenzordnung des Rayleigh-Ritz-Verfahrens, angewendet auf das Eigenwertproblem (SEWP), unter der Voraussetzung, daß die Eigenfunktionen für ein geeignetes $\alpha: X_S \rightarrow \mathbb{R}^+$ (k, α)-regulär sind. Dies ist die Aussage von Satz 5.5(b). Durch Berechnung der eindeutigen Exponenten $\alpha(x)$, $x \in X_S$, und von $\alpha_0 := \min\{\alpha(x) : x \in X_S\}$ ergibt sich für den Fehler des Näherungswertes λ_K^h an den K -ten Eigenwert λ_K mit $\gamma := \min\{\alpha_0, k-1\}$ die Abschätzung:

$$0 \leq \lambda_K^h - \lambda_K \leq C_K(h) h^{2(\gamma+1)} \quad \text{mit } C_K(h) \leq 10 \cdot \alpha_0$$

bei quasi-uniformen Triangulierungen und

$$0 \leq \lambda_K^h - \lambda_K \leq C_K(h) h^{2(\gamma+1)} \quad \text{mit } C_K(h) \leq 10 \cdot \alpha_0$$

für zur Ordnung α , $\alpha_0 = \alpha - k - 1$, verfeinerte Triangulierungen.

(b) In den Sätzen 7.2 bzw. 7.4 werden die Konvergenzordnungen γ bzw. α ausgeschlossen.

Im Fall von Satz 7.2 ist dies auf die logarithmischen Faktoren in Definition 5.1(d) der (k, α) -regulären Funktionen zurückzuführen. Falls gilt $\alpha_0 \notin \mathbb{N}$, so ist die Aussage von Satz 7.2 für $\delta = 0$ gültig, d.h. die Konvergenzordnung γ wird erreicht. Der Beweis verläuft analog wie der angegebene Beweis, da die Aussagen von Satz 5.6 in diesem Fall für $\delta = 0$ gültig bleiben. Es wurde darauf verzichtet, dieses Ergebnis in die Aussage von Satz 7.2 aufzunehmen, da dies eine Fallunterscheidung an α erzwingen hätte, die durch große Teile des Beweises hätte mitgeführt werden müssen. Für die numerischen Anwendungen ist die Verschärfung der Aussage bedeutungslos.

Im Fall von Satz 7.4 ist der Ausschluß der Konvergenzordnung ω auf die Abschätzung (16) des Beweises zurückzuführen und unabhängig von α gegeben. Ein ähnliches Ergebnis haben Schatz, Wahlbin [79] für den punktweisen Fehler der Ritz-Näherung bei Randwertproblemen zum Δ -Operator über Polygongebieten erhalten.

(c) Die Zerlegung der Umgebungen $K_S(x, r_0) \cap S$, $x \in X_S$, in die Zonen U_h^i und V_h^i , wie sie im Beweis von Satz 7.2 vorgenommen wird, findet sich für den Fall von Polygonebieten im $\mathbb{R}^2$ auch bei Veidinger [72], [74]. Die Zerlegung in die Zonen V_ℓ^i , $1 \leq \ell \leq L(x)$, und U_h^i , die im Beweis von Satz 7.4 Anwendung findet, ergibt sich als Verallgemeinerung der Veidingerschen Beweistechnik. Diese Verallgemeinerung wird in Schatz/Wahlbin [79] skizziert.

IV. NUMERISCHE DURCHFÜHRUNG

Ausschlaggebend für die Brauchbarkeit von Ansatzräumen für das Rayleigh-Ritz-Verfahren ist die Güte der besten Approximierenden an die Eigenfunktionen und die effiziente numerische Berechenbarkeit der Matrizen des diskreten Eigenwertproblems. Gegenstand dieses Kapitels ist die Berechnung der Matrizen des diskreten Eigenwertproblems.

In Abschnitt 8 skizzieren wir die Wahl einer geeigneten Basis für die in Abschnitt 7 eingeführten Ansatzräume. Da diese Wahl der Vorgehensweise bei den bekannten Finite-Element-Verfahren für Probleme über ebenen Gebieten entspricht, gehen wir dabei nur soweit ins Detail, als für die weiteren Ausführungen benötigt wird. Ferner führen wir die Berechnung der Matrizen des diskreten Eigenwertproblems bzgl. dieser Basis auf die Berechnung algebraischer Integrale über dem Einheitsdreieck zurück. In Abschnitt 9 geben wir Rekursionsformeln zur Auswertung dieser Integrale an. Diese Formeln gestatten eine effiziente Berechnung der Matrizen, die im diskreten Eigenwertproblem auftreten. In Abschnitt 10 werden numerische Beispiele gegeben.

8. Allgemeines Konzept

Es sei $S_0 \subset S^2$ ein Polygonebiet und $T = (K_i)_{i \in I}$, $|I| < \infty$, eine Triangulierung von S_0 gemäß Definition 4.5.

Für jedes $i \in I$ sei eine affine Bijektion $A_i : \gamma_{K_i}(K_i) \rightarrow E$ gewählt, und es sei $\kappa_i := A_i \circ \gamma_{K_i}$. Nach Satz 4.6 ist dann $((\kappa_i, K_i))_{i \in I}$ eine parametrisierte Triangulierung von S_0 , und für jedes Referenz-Element $R = (P, L, H)$ besitzt der Finite-Element-Raum $S_{T,R}$ die Interpolationseigenschaft.

Wie in Definition 3.4 seien

$$L_T := \{x \in \bar{S}_0 \mid \exists i \in I : \kappa_i(x) \in L\} ,$$

$$H_T := \{x \in \bar{S}_0 \mid \exists i \in I : \kappa_i(x) \in H\} .$$

Für jedes $x \in H_T$ sei eine Basis $\{b_x^1, b_x^2\}$ des Tangentialraums $T_x S^2$ gewählt. Da $S_{T,R}$ die Interpolationseigenschaft besitzt, gibt es für $x \in L_T$ genau ein $\varphi_x^L \in S_{T,R}$ mit:

$$\varphi_x^L(y) = \delta_{x,y} , \quad y \in L_T ; \quad D\varphi_x^L(y) = 0 , \quad y \in H_T ;$$

und für $x \in H_T$, $j = 1, 2$, genau ein $\varphi_{x,j}^H \in S_{T,R}$ mit:

$$\varphi_{x,j}^H(y) = 0 , \quad y \in L_T ;$$

$$D\varphi_{x,j}^H(y) \cdot b_y^k = \delta_{x,y} \delta_{j,k} , \quad y \in H_T , \quad k = 1, 2.$$

Aus der Interpolationseigenschaft folgt ferner, daß

$$\Phi := \{\varphi_x^L \mid x \in L_T\} \cup \{\varphi_{x,j}^H \mid x \in H_T ; j = 1, 2\}$$

eine Basis von $S_{T,R}$ bildet. Die Elemente von Φ besitzen die für die praktische Durchführung der Finite-Element-Methode grundlegende Eigenschaft, daß ihr Träger nur wenige Dreiecke umfaßt:

$$\text{trg } \varphi_x^L, \text{trg } \varphi_{x,1}^H, \text{trg } \varphi_{x,2}^H \subset \bigcup \{K_i | i \in I, x \in K_i\}.$$

Eine Basis ϕ_h der Ansatzräume S_h , die in Abschnitt 7 für das Rayleigh-Ritz-Verfahren, angewandt auf (SEWP), definiert worden sind, kann bei geeigneter Wahl der Tangentialraumbasen $\{b_x^1, b_x^2\}$ aus Basen $\phi_{h,i}$ für die Finiten-Element-Räume über den Teilgebieten $S_i, 1 \leq i \leq M$, von S konstruiert werden. Die Basen $\phi_{h,i}$ über S_i sind dabei analog definiert wie die oben angegebene Basis ϕ für den Finite-Element-Raum über S_0 . Für die Restriktionen $\varphi|_{S_i}$ von $\varphi \in \phi_h$ gilt $\varphi|_{S_i} \in \phi_{h,i} \cup \{0\}$. Die Dirichletsche Randbedingung auf ∂S_D kann bei geeigneter Wahl von $\{b_x^1, b_x^2\}$ für $x \in \partial S_D$ durch Reduktion der Basis auf die Basiselemente, die der Randbedingung genügen, erfüllt werden. Es genügt daher, den oben eingeführten Fall eines Polygongebiets $S_0 \subset S^2$ zu betrachten; S_0 werde als stellvertretend für eines der Teilgebiete $S_i, 1 \leq i \leq M$, angesehen.

In Abschnitt 2 ist die Formulierung (RR') des Rayleigh-Ritz-Verfahrens als Matrix-Eigenwertproblem gegeben worden. Die Elemente der auftretenden Matrizen sind dabei definiert als $a(\varphi_1, \varphi_2), b(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$. Nach Definition von a und b gilt für $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a(\varphi_1, \varphi_2) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} p \nabla(\varphi_1, \varphi_2) \, d\sigma \\
 &= \sum_{i \in I} p|_{K_i} \int_E \sum_{k, \ell=1}^2 D_k(\varphi_1 \circ \kappa_i^{-1}) g^{k\ell} D_\ell(\varphi_2 \circ \kappa_i^{-1}) \sqrt{g} \, dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad b(\varphi_1, \varphi_2) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} p \varphi_1 \varphi_2 \, d\sigma \\
 &= \sum_{i \in I} p|_{K_i} \int_E (\varphi_1 \circ \kappa_i^{-1}) (\varphi_2 \circ \kappa_i^{-1}) \sqrt{g} \, dt_1 dt_2 .
 \end{aligned}$$

Die Berechnung von $a(\varphi_1, \varphi_2)$, $b(\varphi_1, \varphi_2)$ ist somit äquivalent zur Berechnung von Integralen über dem Einheitsdreieck E .

Im folgenden sei der Index i fest gewählt; wir schreiben

kurz K, κ, A, γ_K statt $K_i, \kappa_i, A_i, \gamma_{K_i}$.

Zur Berechnung der Integrale in (1), (2) werden "Formfunktionen" für das Referenz-Element R eingeführt.

Für $t \in L$ sei $\psi_t^L \in P$ definiert durch

$$\psi_t^L(s) = \delta_{t,s}, \quad s \in L; \quad D\psi_t^L(s) = 0, \quad s \in H;$$

für $t \in H$, $j = 1, 2$, sei $\psi_{t,j}^H \in P$ definiert durch

$$\psi_{t,j}^H(s) = 0, \quad s \in L;$$

$$D\psi_{t,j}^H(s) \cdot e_k = \delta_{t,s} \delta_{j,k}, \quad s \in H, \quad k = 1, 2.$$

Nach Definition 3.1(a) bildet die Menge

$$\Psi := \{\psi_t^L \mid t \in L\} \cup \{\psi_{t,j}^H \mid t \in H, \quad j = 1, 2\}$$

eine Basis von P .

Für $\varphi_k \circ \kappa^{-1} \in P$, $k = 1, 2$, erhält man bzgl. dieser Basis die Darstellung:

$$(3) \quad \varphi_k \circ \kappa^{-1} = \sum_{t \in L} (\varphi_k \circ \kappa^{-1})(t) \psi_t^L + \sum_{t \in H} \sum_{j=1}^2 D_j (\varphi_k \circ \kappa^{-1})(t) \psi_{t,j}^H$$

Für $t \in H$ sei $(\beta_{jm}^t)_{j,m=1}^2 \in \mathbb{R}^{2,2}$ definiert durch:

$$D \kappa^{-1}(t) \cdot e_j = \sum_{m=1}^2 \beta_{jm}^t b_{\kappa^{-1}(t)}^m, \quad j = 1, 2.$$

Es folgt für $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} D_j (\varphi_k \circ \kappa^{-1})(t) &= D(\varphi_k \circ \kappa^{-1})(t) \cdot e_j \\ &= D \varphi_k(\kappa^{-1}(t)) \cdot (D \kappa^{-1}(t) \cdot e_j) \\ &= \sum_{m=1}^2 \beta_{jm}^t (D \varphi_k(\kappa^{-1}(t)) \cdot b_{\kappa^{-1}(t)}^m). \end{aligned}$$

Einsetzen in (3) ergibt für $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \varphi_k \circ \kappa^{-1} &= \sum_{x \in L_T \cap K} \varphi_k(x) \psi_{\kappa(x)}^L \\ &+ \sum_{x \in H_T \cap K} \sum_{m=1}^2 (D \varphi_k(x) \cdot b_x^m) \sum_{j=1}^2 \beta_{jm}^{\kappa(x)} \psi_{\kappa(x),j}^H. \end{aligned}$$

In dieser Summe ist wegen $\varphi_k \in \Phi$, $k = 1, 2$, genau einer der Koeffizienten

$$\{\varphi_k(x) \mid x \in L_T \cap K\} \cup \{D \varphi_k(x) \cdot b_x^m \mid x \in H_T \cap K, m = 1, 2\}$$

verschieden von Null; dieser Koeffizient ist gleich Eins.
Die $\beta_{jm}^{\kappa}(x)$, $x \in H_T \cap K$, können durch eine elementare Rechnung aus der vorgegebenen Basis $\{b_x^1, b_x^2\}$ und den Vektoren

$$D \kappa^{-1}(t) \cdot e_j = D \gamma_K^{-1}(A^{-1}(t)) \cdot D A^{-1} \cdot e_j, \quad j = 1, 2, \quad t = \kappa(x),$$

bestimmt werden. Somit ist die Berechnung von $a(\varphi_1, \varphi_2)$ und $b(\varphi_1, \varphi_2)$ zurückgeführt auf die Berechnung der Integrale:

$$(4) \quad \int_E \sum_{k, \ell=1}^2 D_k \psi_1 g^{k\ell} D_\ell \psi_2 \sqrt{g} \, dt_1 dt_2,$$

$$(5) \quad \int_E \psi_1 \psi_2 \sqrt{g} \, dt_1 dt_2, \quad \psi_1, \psi_2 \in \Psi.$$

Die Formfunktionen Ψ sind dem Referenz-Element R unabhängig von K und κ zugeordnet. Nach Definition 3.1 ist P ein endlich-dimensionaler Raum von Polynomen; also gibt es $N = N(R) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid P \subset \mathbb{P}_n\}$. Jede Formfunktion $\psi \in \Psi \subset P \subset \mathbb{P}_N$ kann somit in der Monombasis

$$t_1^m t_2^n, \quad 0 \leq m+n \leq N,$$

von $\mathbb{P}_N$ dargestellt werden. Für die Beispiele 3.2 sind Darstellungen der Formfunktionen bzgl. der Monombasis in der Literatur angegeben (z.B. Schwarz [80]). Zur Berechnung der Integrale (4), (5) genügt es somit, die folgenden Integrale auszuwerten:

$$(6) \int_E \sum_{k, \ell=1}^2 D_k(t_1^i t_2^j) g^{k\ell} D_\ell(t_1^m t_2^n) \sqrt{g} dt_1 dt_2 ,$$

$$(7) \int_E (t_1^i t_2^j) (t_1^m t_2^n) \sqrt{g} dt_1 dt_2 , \quad 0 \leq i+j, m+n \leq N .$$

Dazu sind die geometrischen Größen $g^{k\ell}$, $1 \leq k, \ell \leq 2$, und $\sqrt{g}$ bzgl. der Parametrisierung $\kappa^{-1} = \gamma_K^{-1} \circ A^{-1}$ zu ermitteln.

Für $t = (t_1, t_2)^T \in E$ und $s = (s_1, s_2)^T := A^{-1}(t) \in \gamma_K(K)$ gilt:

$$(g_{k\ell}(t)) = (DA^{-1})^T \cdot D\gamma_K^{-1}(s)^T \cdot D\gamma_K^{-1}(s) \cdot DA^{-1} \in \mathbb{R}^{2,2} .$$

Invertieren liefert:

$$(8) \quad (g^{k\ell}(t)) = DA \cdot (D\gamma_K^{-1}(s)^T \cdot D\gamma_K^{-1}(s))^{-1} \cdot (DA)^T .$$

Nach Bemerkung 4.2(b) gilt:

$$(9) \quad (D\gamma_K^{-1}(s)^T \cdot D\gamma_K^{-1}(s))^{-1} = \gamma(s) \begin{pmatrix} 1+(s_1)^2 & s_1 s_2 \\ s_1 s_2 & 1+(s_2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \gamma(s) := 1+(s_1)^2 + (s_2)^2 .$$

Für $\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{k\ell})}$ erhält man mit 4.2(b) :

$$\begin{aligned} (10) \quad \sqrt{g(t)} &= (\det DA^{-1}) (\det (D\gamma_K^{-1}(s)^T \cdot D\gamma_K^{-1}(s)))^{1/2} \\ &= (\det DA^{-1}) \gamma(s)^{-3/2} . \end{aligned}$$

Es verbleibt die explizite Berechnung von $s = A^{-1}(t)$ und DA .

Seien $x_1, x_2, x_3 \in S^2$ die Ecken von K , wobei die Nummerierung derart gewählt sei, daß gilt: $\kappa(x_i) = a_i$, $i=1,2,3$ (Mit a_i werden die Ecken von E bezeichnet; vgl. Abschnitt 3). Gemäß den Definitionen 4.3(b) und 4.1 sind

$$s^i = (s_1^i, s_2^i) := \gamma_K(x_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ,$$

explizit berechenbar. Die affine Abbildung $A^{-1} : E \rightarrow \gamma_K(K)$ ist bestimmt durch $A^{-1}(a_i) = s^i$, $i = 1, 2, 3$. Man erhält:

$$s = A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} s_1^2 - s_1^1 & s_1^3 - s_1^1 \\ s_2^2 - s_2^1 & s_2^3 - s_2^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$DA = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^2 = \delta_A^{-1} \begin{pmatrix} s_2^3 - s_2^1 & s_1^1 - s_1^3 \\ s_2^1 - s_2^2 & s_1^2 - s_1^1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\delta_A := \det DA^{-1} = ((s_2^3 - s_2^1)(s_1^2 - s_1^1) - (s_1^1 - s_1^3)(s_2^1 - s_2^2)) \quad .$$

Durch Einsetzen in (10) und (8), (9) ergibt sich:

$$(11) \quad \sqrt{g(t)} = \delta_A (G(t_1, t_2))^{-3/2} \quad , \quad \text{wobei}$$

$$G(t_1, t_2) = G_{00} + 2(G_{10}t_1 + G_{01}t_2) + G_{20}t_1^2 + 2G_{11}t_1t_2 + G_{02}t_2^2$$

(m, n)	G_{mn}
$(0, 0)$	$1 + (s_1^1)^2 + (s_2^1)^2$
$(1, 0)$	$s_1^1 (s_1^2 - s_1^1) + s_2^1 (s_2^2 - s_2^1)$
$(0, 1)$	$s_1^1 (s_1^3 - s_1^1) + s_2^1 (s_2^3 - s_2^1)$
$(2, 0)$	$(s_1^2 - s_1^1)^2 + (s_2^2 - s_2^1)^2$
$(1, 1)$	$(s_1^2 - s_1^1) (s_1^3 - s_1^1) + (s_2^2 - s_2^1) (s_2^3 - s_2^1)$
$(0, 2)$	$(s_1^3 - s_1^1)^2 + (s_2^3 - s_2^1)^2$

$$(12) \quad \sqrt{g(t)} \, g^{kl}(t) = \delta_A \left(\sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^{2-m} g_{mn}^{kl} t_1^m t_2^n \right) / \sqrt{G(t_1, t_2)} \quad ,$$

wobei die $g_{mn}^{kl} \in \mathbb{R}$, $m+n \leq 2$, $1 \leq k, l \leq 2$, die symmetrisch in k und l sind, gegeben sind durch:

$$\begin{pmatrix} g_{mn}^{11} \\ g_{mn}^{12} \\ g_{mn}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 & 2\alpha_{12}\alpha_{11} & \alpha_{12}^2 \\ \alpha_{11}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{22}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}^2 & 2\alpha_{21}\alpha_{22} & \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{mn}^1 \\ V_{mn} \\ U_{mn}^2 \end{pmatrix}$$

(m,n)	$u_{mn}^i, i = 1,2$	v_{mn}
$(0,0)$	$1 + (s_1^1)^2$	$s_1^1 s_2^1$
$(1,0)$	$2s_1^1 (s_i^2 - s_i^1)$	$s_1^1 (s_2^2 - s_2^1) + s_2^1 (s_1^2 - s_1^1)$
$(0,1)$	$2s_1^1 (s_i^3 - s_i^1)$	$s_2^1 (s_1^3 - s_1^1) + s_1^1 (s_2^3 - s_2^1)$
$(2,0)$	$(s_i^2 - s_i^1)^2$	$(s_1^2 - s_1^1) (s_2^2 - s_2^1)$
$(1,1)$	$2 (s_i^2 - s_i^1) (s_i^3 - s_i^1)$	$(s_1^2 - s_1^1) (s_2^3 - s_2^1) + (s_1^3 - s_1^1) (s_2^2 - s_2^1)$
$(0,2)$	$(s_i^3 - s_i^1)^2$	$(s_1^3 - s_1^1) (s_2^3 - s_2^1)$

Durch Einsetzen von (12) in (6) und (11) in (7) ist die Berechnung der Integrale (6), (7) und damit von $a(\varphi_1, \varphi_2)$, $b(\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, zurückgeführt auf die Berechnung der Integrale:

$$(13) \quad \int_E \frac{t_1^k t_2^\ell}{(G(t_1, t_2))^{1/2}} dt_1 dt_2, \quad ,$$

$$(14) \quad \int_E \frac{t_1^k t_2^\ell}{(G(t_1, t_2))^{3/2}} dt_1 dt_2, \quad , \quad 0 \leq k+\ell \leq 2N.$$

Die Auswertung dieser Integrale ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

9. Berechnung der lokalen Gleichungssysteme

In Abschnitt 8 wurde die Berechnung der Matrizen des diskreten Eigenwertproblems zurückgeführt auf die Auswertung der Integrale:

$$A(m,n) := \int_0^1 \left(\int_0^{1-s} \frac{s^m t^n}{\sqrt{G(s,t)}} dt \right) ds, \quad 0 \leq m+n \leq 2N,$$

$$B(m,n) := \int_0^1 \left(\int_0^{1-s} \frac{s^m t^n}{(G(s,t))^{3/2}} dt \right) ds,$$

$$G(s,t) := G_{00} + 2(G_{10}s + G_{01}t) + G_{20}s^2 + 2G_{11}st + G_{02}t^2.$$

Aus der Herleitung in Abschnitt 8, (10), (11), folgt:

$$G(s,t) > 0 \quad \text{für alle } (s,t)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Damit ist auch für die Diskriminante von $G(s,t)$, betrachtet als Polynom in t bei festgehaltenem s :

$$\begin{aligned} \Delta_G(s) &:= G_{02}(G_{00} + 2G_{10}s + G_{20}s^2) - (G_{01} + G_{11}s)^2 \\ &= (G_{20}G_{02} - G_{11}^2)s^2 + 2(G_{02}G_{10} - G_{01}G_{11})s + (G_{02}G_{00} - G_{01}^2) \end{aligned}$$

erfüllt:

$$\Delta_G(s) > 0 \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Aus der Definition von G_{ij} in Abschnitt 8, (11), folgt:

$$(G_{20}G_{02} - G_{11}^2) > 0.$$

Sei ferner definiert:

$$p_{G,1}(s) := G(s, 1-s) = (G_{20} - 2G_{11} + G_{02})s^2 \\ + 2(G_{10} + G_{11} - G_{01} - G_{02})s + (G_{02} + 2G_{01} + G_{00}),$$

$$p_{G,2}(s) := G(s, 0) = G_{20}s^2 + 2G_{10}s + G_{00}.$$

Wiederum aus Abschnitt 8, (11), folgt:

$$G_{20} - 2G_{11} + G_{02} > 0, \quad G_{20} > 0.$$

Für quadratische Polynome

$$p(s) = p_0 + 2p_1s + p_2s^2, \quad q(s) = q_0 + 2q_1s + q_2s^2,$$

mit $p_2, q_2 > 0$ und $p(s), q(s) > 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ sei für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert:

$$I_1(n, p) := \int_0^1 \frac{s^n}{\sqrt{p(s)}} ds,$$

$$I_2(n, p) := \int_0^1 s^n \sqrt{p(s)} ds,$$

$$I_3(n, p, q) := \int_0^1 \frac{s^n}{q(s) \sqrt{p(s)}} ds.$$

In den Sätzen 9.1, 9.2 wird die Berechnung von $A(m, n)$ und $B(m, n)$ zurückgeführt auf die Auswertung der folgenden Integrale über dem Einheitsintervall:

$$\begin{aligned} C_1(k) &:= I_1(k, p_{G,1}) & , & \quad C_2(k) := I_1(k, p_{G,2}) \\ D_1(k) &:= I_2(k, p_{G,1}) & , & \quad D_2(k) := I_2(k, p_{G,2}) \\ E_1(k) &:= I_3(k, p_{G,1}, \Delta_G) & , & \quad E_2(k) := I_3(k, p_{G,2}, \Delta_G) . \end{aligned}$$

9.1 Satz

(a) Für $m \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} A(m, 0) &= \frac{1}{m+1} (-\delta_1 E_1(m+2) - \varepsilon_1 E_1(m+1) \\ &\quad + \delta_2 E_2(m+2) + \varepsilon_2 E_2(m+1)) , \text{ wobei} \end{aligned}$$

$$\delta_2 := G_{10} G_{11} - G_{01} G_{20} ,$$

$$\delta_1 := \delta_2 + G_{11}(G_{11} + G_{01}) - G_{02}(G_{10} + G_{20}) ,$$

$$\varepsilon_2 := G_{00} G_{11} - G_{01} G_{10} ,$$

$$\varepsilon_1 := \varepsilon_2 + G_{01}(G_{11} + G_{01}) - G_{02}(G_{10} + G_{00}) .$$

(b) Für $m \geq 0$ gilt:

$$A(m, 1) = \frac{1}{G_{02}} (D_1(m) - D_2(m) - G_{01} A(m, 0) - G_{11} A(m+1, 0)) .$$

(c) Für $m > 0$, $n > 2$ gilt:

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \frac{1}{n G_{02}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i D_1(m+i) \right. \\ &\quad \left. - (2n-1) (G_{01} A(m, n-1) + G_{11} A(m+1, n-1)) \right. \\ &\quad \left. - (n-1) (G_{00} A(m, n-2) + 2G_{10} A(m+1, n-2) + G_{20} A(m+2, n-2)) \right) . \end{aligned}$$

Beweis:

zu (a) : Nach Bronstein [71], S. 313, Formel 241, gilt

$$\int_0^{1-s} \frac{1}{\sqrt{G(s,t)}} dt = \frac{1}{\sqrt{G_{02}}} \left[\operatorname{arsh} \frac{G_{02}t + (G_{01} + G_{11}s)}{\sqrt{\Delta_G(s)}} \right]_{t=0}^{t=1-s}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} (1) \quad A(m,0) &= \int_0^1 s^m \left(\int_0^{1-s} \frac{1}{\sqrt{G(s,t)}} dt \right) ds \\ &= (J_1(m) - J_2(m)) / \sqrt{G_{02}}, \text{ wobei} \end{aligned}$$

$$J_1(m) := \int_0^1 s^m \operatorname{arsh} \left(\frac{(G_{11} - G_{02})s + (G_{02} + G_{01})}{\sqrt{\Delta_G(s)}} \right) ds,$$

$$J_2(m) := \int_0^1 s^m \operatorname{arsh} \left(\frac{G_{11}s + G_{01}}{\sqrt{\Delta_G(s)}} \right) ds.$$

Sei $\Delta_G(s) = \alpha s^2 + 2\beta s + \gamma$ und $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\frac{d}{ds} \operatorname{arsh} \left(\frac{\delta s + \epsilon}{\sqrt{\Delta_G(s)}} \right) = \frac{ds + e}{\Delta_G(s) \sqrt{as^2 + 2bs + c}},$$

wobei $a := \alpha + \delta^2$, $b := \beta + \epsilon\delta$, $c := \gamma + \epsilon^2$, $d := \beta\delta - \alpha\epsilon$,

$e := \delta\gamma - \epsilon\beta$ folgt durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_0^1 s^m \operatorname{arsh} \left(\frac{\delta s + \epsilon}{\sqrt{\Delta_G(s)}} \right) ds &= \frac{1}{m+1} \operatorname{arsh} \frac{\delta + \epsilon}{\sqrt{\Delta_G(1)}} \\ &\quad - \frac{1}{m+1} \int_0^1 s^{m+1} \frac{ds + e}{\Delta_G(s) \sqrt{as^2 + 2bs + c}} ds. \end{aligned}$$

Anwenden von (2) auf $J_1(m)$, $J_2(m)$ liefert nach Rechnung:

$$J_1(m) = \frac{1}{m+1} \left(\operatorname{arsh} \frac{G_{11} + G_{01}}{\sqrt{\Delta_G(1)}} - \sqrt{G_{02}} (\delta_1 E_1(m+2) + \varepsilon_1 E_1(m+1)) \right),$$

$$J_2(m) = \frac{1}{m+1} \left(\operatorname{arsh} \frac{G_{11} + G_{01}}{\sqrt{\Delta_G(1)}} - \sqrt{G_{02}} (\delta_2 E_2(m+2) + \varepsilon_2 E_2(m+1)) \right).$$

Einsetzen in (1) ergibt Behauptung (a).

zu (b): Wegen

$$\int_0^{1-s} \frac{(G_{01} + G_{11}s) + G_{02}t}{\sqrt{G(s,t)}} dt = \left[\sqrt{G(s,t)} \right]_{t=0}^{t=1-s}$$

gilt:

$$\int_0^{1-s} \frac{t}{\sqrt{G(s,t)}} dt = \frac{1}{G_{02}} \left(\left[\sqrt{G(s,t)} \right]_{t=0}^{t=1-s} - (G_{01} + G_{11}s) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{G(s,t)}} dt \right)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} A(m, 1) &= \int_0^1 s^m \left(\int_0^{1-s} \frac{t}{\sqrt{G(s,t)}} dt \right) ds \\ &= \frac{1}{G_{02}} \left(\int_0^1 s^m \sqrt{G(s, 1-s)} ds - \int_0^1 s^m \sqrt{G(s, 0)} ds \right. \\ &\quad \left. - G_{01} A(m, 0) - G_{11} A(m+1, 0) \right). \end{aligned}$$

Nach Definition von $D_1(m), D_2(m)$ folgt (b).

zu (c) :

Sei $m \geq 0, n \geq 2$. Partielle Integration liefert:

$$\int_0^{1-s} t^{n-1} \frac{(G_{01} + G_{11}s) + G_{02}t}{\sqrt{G(s,t)}} dt = \left[t^{n-1} \sqrt{G(s,t)} \right]_{t=0}^{t=1-s} - (n-1) \int_0^{1-s} t^{n-2} \sqrt{G(s,t)} dt.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} G_{02} \int_0^{1-s} \frac{t^n}{\sqrt{G(s,t)}} dt + (G_{01} + G_{11}s) \int_0^{1-s} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{G(s,t)}} dt \\ = (1-s)^{n-1} \sqrt{G(s,1-s)} - (n-1) G_{02} \int_0^{1-s} \frac{t^n}{\sqrt{G(s,t)}} dt \\ - (n-1) 2(G_{01} + G_{11}s) \int_0^{1-s} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{G(s,t)}} dt \\ - (n-1)(G_{00} + 2G_{10}s + G_{20}s^2) \int_0^{1-s} \frac{t^{n-2}}{\sqrt{G(s,t)}} dt \end{aligned}$$

Auflösen nach $\int_0^{1-s} \frac{t^n}{\sqrt{G(s,t)}} dt$ ergibt:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-s} \frac{t^n}{\sqrt{G(s,t)}} dt = \frac{1}{nG_{02}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i s^i \sqrt{G(s,1-s)} \right. \\ \left. - (2n-1)(G_{01} + G_{11}s) \int_0^{1-s} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{G(s,t)}} dt \right) \end{aligned}$$

$$-(n-1) (G_{00} + 2G_{10}s + G_{20}s^2) \int_0^{1-s} \frac{t^{n-2}}{\sqrt{G(s,t)}} dt .$$

Einsetzen in

$$A(m,n) = \int_0^1 s^m \left(\int_0^{1-s} \frac{t^n}{\sqrt{G(s,t)}} dt \right) ds$$

ergibt nach Definition von $A(i,j)$ und $D_1(i)$ die Behauptung.

#

9.2 Satz

(a) Für $m > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} B(m,0) &= G_{02} (E_1(m) - E_1(m+1)) + G_{11} (E_1(m+1) - E_2(m+1)) \\ &\quad + G_{01} (E_1(m) - E_2(m)) . \end{aligned}$$

(b) Für $m \geq 0$ gilt:

$$B(m,1) = \frac{1}{G_{02}} (-C_1(m) + C_2(m) - G_{01}B(m,0) - G_{11}B(m+1,0)) .$$

(c) Für $m \geq 0$, $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \frac{1}{G_{02}} \left(- \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i C_1(m+i) + (n-1)A(m,n-2) \right. \\ &\quad \left. - G_{01}B(m,n-1) - G_{11}B(m+1,n-1) \right) . \end{aligned}$$

Beweis:

zu (a): Nach Bronstein [71], S. 313, Formel 242, gilt:

$$\int_0^{1-s} \frac{1}{(G(s,t))^{3/2}} dt = \left[\frac{2(2G_{02}t + 2(G_{01} + G_{11}s))}{4\Delta_G(s)\sqrt{G(s,t)}} \right]_{t=0}^{t=1-s}$$

$$= \frac{(G_{11} - G_{02})s + (G_{01} + G_{02})}{\Delta_G(s)\sqrt{G(s,1-s)}} - \frac{G_{11}s + G_{01}}{\Delta_G(s)\sqrt{G(s,0)}}.$$

Es folgt nach Definition von $E_1(k)$, $E_2(k)$:

$$B(m,0) = \int_0^1 s^m \left(\int_0^{1-s} \frac{1}{(G(s,t))^{3/2}} dt \right) ds$$

$$= (G_{11} - G_{02})E_1(m+1) + (G_{01} + G_{02})E_1(m)$$

$$- G_{11}E_2(m+1) - G_{01}E_2(m).$$

Hieraus folgt (a).

zu (b): Wegen

$$\int_0^{1-s} \frac{(G_{01} + G_{11}s) + G_{02}t}{(G(s,t))^{3/2}} dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{G(s,t)}} \right]_{t=0}^{t=1-s} \quad \text{gilt:}$$

$$\int_0^{1-s} \frac{t}{(G(s,t))^{3/2}} dt = \frac{1}{G_{02}} \left(\left[-\frac{1}{\sqrt{G(s,t)}} \right]_{t=0}^{t=1-s} \right. \\ \left. - (G_{01} + G_{11}s) \int_0^{1-s} \frac{1}{(G(s,t))^{3/2}} dt \right).$$

Es folgt:

$$B(m,1) = \int_0^1 s^m \left(\int_0^{1-s} \frac{t}{(G(s,t))^{3/2}} dt \right) ds \\ = \frac{1}{G_{02}} \left(- \int_0^1 \frac{s^m}{\sqrt{G(s,1-s)}} ds + \int_0^1 \frac{s^m}{\sqrt{G(s,0)}} ds \right. \\ \left. - G_{01}B(m,0) - G_{11}B(m+1,0) \right).$$

Nach Definition von $C_1(m)$, $C_2(m)$ folgt (b).

zu (c): Sei $m \geq 0, n \geq 2$. Partielle Integration ergibt:

$$\int_0^{1-s} t^{n-1} \frac{(G_{01} + G_{11}s) + G_{02}t}{(G(s,t))^{3/2}} dt = \left[-\frac{t^{n-1}}{\sqrt{G(s,t)}} \right]_{t=0}^{t=1-s} \\ + (n-1) \int_0^{1-s} \frac{t^{n-2}}{\sqrt{G(s,t)}} dt.$$

Auflösen nach $\int_0^{1-s} \frac{t^n}{(G(s,t))^{3/2}} dt$ ergibt:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-s} \frac{t^n}{(G(s,t))^{3/2}} dt &= \frac{1}{G_{02}} \left(-\frac{(1-s)^{n-1}}{\sqrt{G(s,1-s)}} + (n-1) \int_0^{1-s} \frac{t^{n-2}}{\sqrt{G(s,t)}} dt \right. \\ &\quad \left. - (G_{01} + G_{11}s) \int_0^{1-s} \frac{t^{n-1}}{(G(s,t))^{3/2}} dt \right). \end{aligned}$$

Einsetzen in

$$B(m,n) = \int_0^1 s^m \left(\int_0^{1-s} \frac{t^n}{(G(s,t))^{3/2}} dt \right) ds$$

ergibt nach Definition von $A(i,j)$, $B(i,j)$ und $C_1(k)$ die Behauptung (c).

#

Um die Rekursionsformeln in 9.1 und 9.2 auswerten zu können, sind die Integrale $C_i(k)$, $D_i(k)$, $E_i(k)$, $i = 1, 2$, zu berechnen. Dies kann wieder durch Rekursion geschehen.

Seien $p(s) = p_0 + 2p_1s + p_2s^2$, $p_2 > 0$, $p(s) > 0$ für $s \in \mathbb{R}$, und

$q(s) = q_0 + 2q_1s + q_2s^2$, $q_2 > 0$, $q(s) > 0$ für $s \in \mathbb{R}$. In den folgenden Sätzen werden Rekursionsformeln zur Berechnung

von $I_1(n,p)$, $I_2(n,p)$, $I_3(n,p,q)$ angegeben. Wir schreiben

kurz $I_1(n)$, $I_2(n)$, $I_3(n)$.

9.3 Satz

Seien $h_1 := \sqrt{p(1)}$, $h_2 := \sqrt{p(0)}$, $h_3 := \sqrt{p_2}$. Dann gelten:

$$(a) \quad I_1(0) = \frac{1}{h_3} \operatorname{arsh} (h_3(p_2 h_2 + p_1(h_2 - h_1)) / (p_0 p_2 - p_1^2)),$$

$$(b) \quad I_1(1) = (h_1 - h_2 - p_1 I_1(0)) / p_2,$$

(c) Für $n \geq 2$ gilt:

$$I_1(n) = \frac{1}{n p_2} (h_1 - (2n-1)p_1 I_1(n-1) - (n-1)p_0 I_1(n-2))$$

Beweis:

zu (a): Nach Bronstein [71], S. 313, Formel 241, gilt:

$$I_1(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{p(s)}} ds = \left[\frac{1}{\sqrt{p_2}} \operatorname{arsh} \frac{p_2 s + p_1}{\sqrt{p_0 p_2 - p_1^2}} \right]_{s=0}^{s=1}$$

Behauptung (a) folgt durch Anwendung der Formel

$$\operatorname{arsh} s - \operatorname{arsh} t = \operatorname{arsh} (s\sqrt{1+t^2} - t\sqrt{1+s^2})$$

zu (b): Behauptung (b) folgt aus:

$$\int_0^1 \frac{p_2 s + p_1}{\sqrt{p(s)}} ds = \left[\sqrt{p(s)} \right]_{s=0}^{s=1} = h_1 - h_2$$

zu (c) : Durch partielle Integration folgt für $n \geq 2$:

$$\int_0^1 s^{n-1} \frac{p_2 s + p_1}{\sqrt{p(s)}} ds = \left[s^{n-1} \sqrt{p(s)} \right]_{s=0}^{s=1} - (n-1) \int_0^1 s^{n-2} \sqrt{p(s)} ds$$

Hieraus folgt:

$$p_2 I_1(n) + p_1 I_1(n-1) = h_1 - (n-1) (p_2 I_1(n) + 2p_1 I_1(n-1) + p_0 I_1(n-2)).$$

Auflösen nach $I_1(n)$ ergibt (c).

#

9.4 Satz

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$I_2(n) = p_2 I_1(n+2) + 2p_1 I_1(n+1) + p_0 I_1(n)$$

Beweis:

Die Behauptung folgt aus

$$I_2(n) = \int_0^1 s^n \sqrt{p(s)} ds = \int_0^1 \frac{s^n p(s)}{\sqrt{p(s)}} ds .$$

#

9.5 Satz

(a) Seien $h := \sqrt{p_0 p_2 - p_1^2}$;

$$x_1 := (p_0 + p_1)/h ; \quad x_0 := p_1/h ;$$

$$a := q_2 h^2 / p_2^2 ; \quad b := (q_1 p_2 - q_2 p_1) h / p_2^2 ,$$

$$c := (q_0 p_2^2 - 2q_1 p_2 p_1 + q_2 p_1^2) / p_2^2 ;$$

$$r := -b/a ; \quad s := \sqrt{ac - b^2} / a ;$$

$$F_0 := \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{((x-r)^2 + s^2) \sqrt{1+x^2}} dx ;$$

$$F_1 := \int_{x_0}^{x_1} \frac{x}{((x-r)^2 + s^2) \sqrt{1+x^2}} dx ;$$

Dann gelten:

$$I_3(0) = \frac{1}{\sqrt{p_2} a} F_0 ;$$

$$I_3(1) = \frac{1}{p_2^{3/2} a} (h F_1 - p_1 F_0) .$$

(b) Für $n \geq 2$ gilt:

$$I_3(n) = \frac{1}{q_2} (I_1(n-2) - 2q_1 I_3(n-1) - q_0 I_3(n-2)) .$$

Beweis:

zu (a): Für $i = 0, 1$ gilt:

$$I_3(i) = \int_0^1 \frac{s^i}{q(s) \sqrt{p(s)}} ds$$

Durch die Substitution

$$s = \frac{h}{p_2} x - \frac{p_1}{p_2} ; \quad x = \frac{p_2}{h} (s + \frac{p_1}{p_2}) ;$$

transformieren sich $I_3(0)$, $I_3(1)$ in die Integrale:

$$I_3(0) = \frac{1}{\sqrt{p_2}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{(ax^2+2bx+c)\sqrt{1+x^2}} dx ,$$

$$I_3(1) = \frac{1}{p_2^{3/2}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{hx - p_1}{(ax^2+2bx+c)\sqrt{1+x^2}} dx .$$

Da das Polynom $ax^2+2bx+c$ durch eine affine Transformation aus $q(s)$ hervorgeht, gilt

$$ax^2+2bx+c > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und somit

$$a > 0 , \quad ac - b^2 > 0 .$$

$$\text{Wegen } ax^2+2bx+c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{a}(ac - b^2)$$

folgt:

$$I_3(0) = \frac{1}{\sqrt{p_2} a} F_0 ,$$

$$I_3(1) = \frac{1}{p_2^{3/2} a} (hF_1 - p_1 F_0) .$$

zu (b):

Für $n \geq 2$ gilt:

$$\frac{s^n}{q(s)} = \frac{1}{q_2} (s^{n-2} - 2q_1 \frac{s^{n-1}}{q(s)} - q_0 \frac{s^{n-2}}{q(s)}) .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 I_3(n) &= \int_0^1 \frac{s^n}{\sqrt{p(s)} q(s)} ds \\
 &= \frac{1}{q_2} (I_1(n-2) - 2q_1 I_3(n-1) - q_0 I_3(n-2)) . \\
 &\hspace{25em} \#
 \end{aligned}$$

9.6 Bemerkungen

(a) Die Integrale F_0, F_1 aus Satz 9.5(a) können mit Hilfe der Formeln 20a), 20b) in Gröbner/Hofreiter [57], S. 49, ausgewertet werden.

Für $r \in \mathbb{R}, s > 0$ mit $(r, s) \neq (0, 1)$ gelten mit

$$\begin{aligned}
 h &:= 1 + r^2 - s^2 & ; \quad \rho^2 &:= \sqrt{h^2 + 4r^2 s^2} & ; \\
 \beta_1 &:= \sqrt{(\rho^2 + h)/2} & ; \quad \beta_2 &:= \text{sign}(r) \sqrt{\rho^2 - \beta_1^2} & ; \quad (\text{sign}(0) := 1) \\
 \gamma_1 &:= (\beta_1 r + \beta_2 s) / \rho^2 & ; \quad \gamma_2 &:= (\beta_1 s - \beta_2 r) / \rho^2 & ; \\
 \delta_1 &:= \beta_1 / \rho^2 & ; \quad \delta_2 &:= -\beta_2 / \rho^2
 \end{aligned}$$

die Formeln

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{((x-r)^2 + s^2) \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{s\rho^2} \left[\frac{\beta_2}{2} T_L + \beta_1 (T_1 - T_2) \right] \\
 F_1 &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{x}{((x-r)^2 + s^2) \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{s} \left[-\frac{\gamma_2}{2} T_L + \gamma_1 (T_1 - T_2) \right]
 \end{aligned}$$

wobei

$$T_L := \left[\ln \frac{(x-r)^2 + s^2}{(\gamma_1 x + \delta_1 - \sqrt{1+x^2})^2 + (\gamma_2 x + \delta_2)^2} \right]_{x=x_0}^{x=x_1},$$

$$T_1 := \left[\arctan \frac{s}{x-r} \right]_{x=x_0}^{x=x_1},$$

$$T_2 := \left[\arctan \frac{\gamma_1 x + \delta_1 - \sqrt{1+x^2}}{\gamma_2 x + \delta_2} \right]_{x=x_0}^{x=x_1}.$$

Bei der Auswertung von T_1 bzw. T_2 ist im Fall $x_0 \leq r \leq x_1$ bzw. $x_0 \leq -\delta_2/\gamma_2 \leq x_1$ der Zweig des arctan zu wechseln.

(b) Aus den Sätzen 9.1-9.5 erhält man den folgenden Algorithmus zur Berechnung von $A(m,n)$, $B(m,n)$, $0 \leq m+n \leq 2N$:

- (i) Berechne $C_1(k)$, $C_2(k)$, $0 \leq k \leq 2N+2$, gemäß Satz 9.3,
- (ii) Berechne $D_1(k)$, $D_2(k)$, $0 \leq k \leq 2N$, gemäß Satz 9.4,
- (iii) Berechne $E_1(k)$, $E_2(k)$, $0 \leq k \leq 2N+2$, gemäß Satz 9.5,
- (iv) Berechne $A(m,n)$, $0 \leq m+n \leq 2N$, gemäß Satz 9.1,
- (v) Berechne $B(m,n)$, $0 \leq m+n \leq 2N$, gemäß Satz 9.2.

10. Numerische Ergebnisse

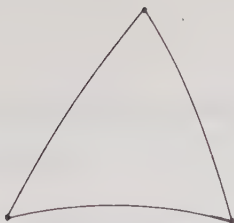
In diesem Abschnitt wird an vier Problemen der Form (EWP) das numerische Verhalten des Rayleigh-Ritz-Verfahrens mit den in Abschnitt 7 angegebenen Ansatzräumen getestet.

Mit den ersten zwei Problemen, für die der kleinste Eigenwert jeweils bekannt ist, soll überprüft werden, ob die aus den Sätzen 7.2 und 7.4 folgende Konvergenzordnung bereits bei groben Triangulierungen beobachtet werden kann.

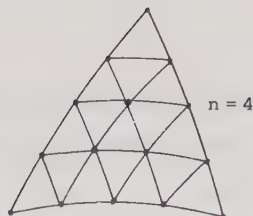
Als drittes Beispiel wird das von Fichera [75] untersuchte Eigenwertproblem für die $7/8$ -Kugel $S_{7/8}$ behandelt. Im vierten Beispiel schließlich wird das vorgeschlagene Verfahren auf ein Interface-Problem über der gesamten Sphäre S^2 angewendet, das in der Literatur bisher nicht bearbeitet worden ist.

Die den Rechnungen zugrundeliegenden Triangulierungen wurden vom Rechner aus vorgegebenen Makro-Triangulierungen der Grundgebiete S erzeugt. Die Makro-Triangulierungen werden zu jedem Beispiel angegeben.

Die quasi-uniformen Triangulierungen wurden aus den Makro-Triangulierungen durch äquidistante Teilung der Dreiecksseiten und entsprechende Verfeinerung erzeugt. Sie werden spezifiziert durch den Parameter n , der die Anzahl der Teilintervalle je Dreiecksseite der Makro-Triangulierung angibt.



Dreieck der Makro-
Triangulierung



Entsprechender Teil der
quasi-uniformen Triangulierung

Man beachte, daß bei dieser Zerlegung die erzeugten Teildreiecke eines sphärischen Dreiecks nicht paarweise kongruent sind.

Für die Erzeugung lokal verfeinerter Triangulierungen werden an die Makro-Triangulierung folgende Bedingungen gestellt:

- jedes Dreieck enthält höchstens einen singulären Punkt,
- der Winkel an einem singulären Eckpunkt ist kleiner als $\pi/2$.

Wir nehmen im folgenden zusätzlich an, daß alle singulären Punkte, an denen die Triangulierung lokal verfeinert werden soll, den gleichen singulären Exponenten α besitzen. Ist das nicht der Fall, so sind die folgenden Ausführungen auf jede Klasse singulärer Punkte mit gleichem singulären Exponenten zu übertragen. Die Ordnung des Referenz-Elements $R = (P, L, H)$ sei k .

Die lokal verfeinerten Triangulierungen sind durch drei Parameter n, n_s, ε bestimmt. Der Parameter n gibt an, wie die Makro-Triangulierung in den Dreiecken, die keinen singulären Punkt enthalten, zu verfeinern ist. Diese Drei-

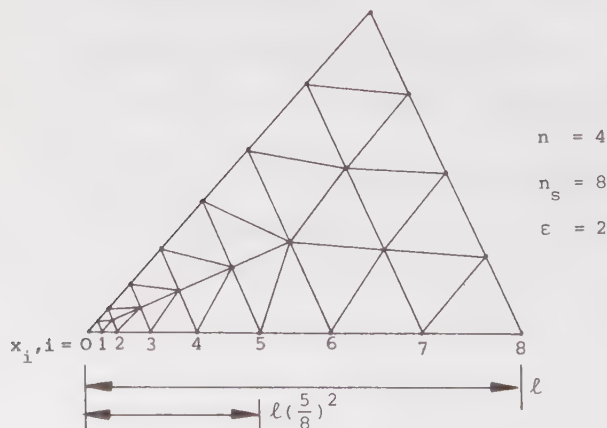
ecke werden analog wie bei der Erzeugung quasi-uniformer Triangulierungen durch äquidistante Teilung der Dreiecksseiten in n^2 Teildreiecke zerlegt.

Ist ω , $\alpha < \omega \leq k-1$, die gewünschte Konvergenzordnung (vgl. Satz 7.4), so sind die Parameter n_s, ϵ zu be-
setzen mit:

$$(1) \quad \epsilon = \omega/\alpha \quad ; \quad n_s = [\epsilon n]$$

([z], $z \in \mathbb{R}$, sei die größte ganze Zahl kleiner oder gleich z).

Ist K ein Dreieck der Makro-Triangulierung mit einem singulären Eckpunkt x , so wird die x gegenüberliegende Seite durch $n+1$ äquidistante Teilpunkte zerlegt. Die Seiten, die x enthalten, werden durch n_s+1 Teilpunkte unterteilt. Beginnt die Zählung der Teilpunkte mit 0 bei x , so besitzt der i -te Teilpunkt x_i , $0 \leq i \leq n_s$, die Entfernung $\ell(\frac{i}{n_s})^\epsilon$ von x , falls ℓ die Länge der entsprechenden Seite von K ist. Die Triangulierung von K wird dann analog wie im folgenden Beispiel durchgeführt:



Wegen
$$1 - \left(\frac{n_s - 1}{n_s} \right)^\varepsilon = 1 - \left(1 - \frac{1}{n_s} \right)^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{[\varepsilon n]} + O\left(\frac{1}{n_s^2} \right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right)$$

ist ein kontinuierlicher Übergang von nicht verfeinerten in verfeinerte Bereiche der Triangulierung gewährleistet. Für $n \rightarrow \infty$ ist für die so erzeugten Triangulierungen die Winkelbedingung 7.3(a) nicht erfüllt. Da in den Anwendungen mit wachsendem n sehr schnell die Kapazität der üblichen Rechenanlagen ausgelastet ist (i.a. $n < 10$), hat diese Verletzung der Voraussetzungen von Satz 7.4 für die numerische Praxis keine Bedeutung.

Zum Nachweis der Bedingung 7.3(b) wird die folgende Abschätzung (2) für die Länge der Dreiecksseiten, die auf den x enthaltenden Seiten von K liegen, gegeben.

Die betrachtete Seite von K habe die Länge ℓ , und die auf ihr liegenden Knoten der lokal verfeinerten Triangulierung seien x_i , $0 \leq i \leq n_s$, mit $x_0 = x$,

$$d_s(x_0, x_i) = \ell \left(\frac{i}{n_s} \right)^\varepsilon, \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} d_s(x_i, x_{i+1}) &= \ell \left(\left(\frac{i+1}{n_s} \right)^\varepsilon - \left(\frac{i}{n_s} \right)^\varepsilon \right) = \ell \left(\frac{i+1}{n_s} \right)^\varepsilon \left(1 - \left(\frac{i}{i+1} \right)^\varepsilon \right) \\ &= \ell^{1 - \frac{\omega}{k-1}} \ell^{\frac{\omega}{k-1}} \left(\frac{i+1}{n_s} \right)^{\frac{\omega}{k-1}} \left(\frac{i+1}{n_s} \right)^{-\frac{\omega}{k-1}} \left(\frac{i+1}{n_s} \right)^{\frac{\omega}{\alpha}} \left(1 - \left(\frac{i}{i+1} \right)^{\frac{\omega}{\alpha}} \right) \\ &= \ell^{1 - \frac{\omega}{k-1}} \left(\frac{\ell}{n} \right)^{\frac{\omega}{k-1}} \left(\frac{n}{n_s} \right)^{\frac{\omega}{k-1}} (i+1)^{\frac{\omega}{k-1}} \left(\frac{i+1}{n_s} \right)^{\frac{\omega}{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{k-1} \right)} \left(1 - \left(\frac{i}{i+1} \right)^{\frac{\omega}{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

$$\leq C \left(\frac{\ell}{n} \right)^{\frac{\omega}{k-1}} d_S(x_{i+1}, x_0)^{1 - \frac{\alpha}{k-1}} (i+1)^{\frac{\omega}{k-1}} \left(1 - \left(\frac{i}{i+1} \right)^{\frac{\omega}{\alpha}} \right),$$

wobei C von n , n_S und i unabhängig ist. Wegen

$$(i+1)^{\frac{\omega}{k-1}} \left(1 - \left(\frac{i}{i+1} \right)^{\frac{\omega}{\alpha}} \right) = (i+1)^{\frac{\omega}{k-1}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{i+1} \right)^{\frac{\omega}{\alpha}} \right)$$

$$= (i+1)^{\frac{\omega}{k-1}} \left(\frac{\omega}{\alpha} \frac{1}{i+1} + O\left(\left(\frac{1}{i+1} \right)^2 \right) \right)$$

und $\omega \leq k-1$ folgt:

$$d_S(x_i, x_{i+1}) \leq C_2 \left(\frac{\ell}{n} \right)^{\frac{\omega}{k-1}} d_S(x_{i+1}, x)^{1 - \frac{\alpha}{k-1}}.$$

Ferner gilt für $0 \leq i \leq n_S$:

$$d_S(x_i, x_{i+1}) \geq d_S(x_0, x_1) = \ell \left(\frac{1}{n_S} \right)^\varepsilon = \ell^{1-\varepsilon} \left(\frac{\ell}{n} \right)^\varepsilon \left(\frac{n}{n_S} \right)^\varepsilon.$$

Wegen $n/n_S \geq 1/\varepsilon$ folgt mit $C_1 := \ell^{1-\varepsilon} \varepsilon^{-\varepsilon}$:

$$d_S(x_i, x_{i+1}) \geq C_1 \left(\frac{\ell}{n} \right)^{\frac{\omega}{\alpha}}$$

Da es $C'_1, C'_2 > 0$, unabhängig von n und n_S gibt, so daß für die maximale Seitenlänge h der lokal verfeinerten Triangulierung gilt:

$$C'_1 h \leq \frac{\ell}{n} \leq C'_2 h$$

folgt für $0 \leq i \leq n_S - 1$:

$$(2) \quad C_1 C_1^\varepsilon h^{\frac{\omega}{\alpha}} \leq d_S(x_i, x_{i+1}) \leq C_2 C_2^{\frac{\omega}{k-1}} h^{\frac{\omega}{k-1}} d_S(x_{i+1}, x)^{1-\frac{\alpha}{k-1}}$$

Diese Abschätzung läßt die Gültigkeit der Bedingung 7.3(b) plausibel erscheinen. Auf einen ausführlichen Beweis wird verzichtet.

In den folgenden Beispielen wurde als Referenz-Element das in 3.2(c) angegebene reduzierte kubische Hermite-Element gewählt. Für die Ordnung k gilt $k=3$. Der Parameter h zu einer Triangulierung $(K_i)_{i \in I}$ wurde bestimmt als $h := \max_{i \in I} \{d_G(K_i)\}$. Die Matrix-Eigenwertprobleme wurden mit der Methode der simultanen inversen Vektoriteration (vgl. Schwarz [80], 5.2.2) näherungsweise gelöst. Alle Rechnungen wurden an der Rechenanlage CDC Cyber 175 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, durchgeführt.

1. Beispiel:

Das Grundgebiet S wird als $1/8$ -Sphäre gewählt:

$$S_{1/8} := \{x \in S^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}.$$

Die Aufgabenstellung lautet:

$$(3) \quad \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{auf } S_{1/8}, \quad u|_{\partial S_{1/8}} = 0.$$

Für $x \in X_S = \{e_1, e_2, e_3\}$ gilt nach Beispiel 5.4(a):

$$\alpha(x) = 2, \quad \alpha_0 = \min \{\alpha(x) \mid x \in X_S\} = 2.$$

Nach Satz 7.2 gilt für die zu erwartende Konvergenzordnung für quasi-uniforme Triangulierungen

$$\gamma = 2 \quad .$$

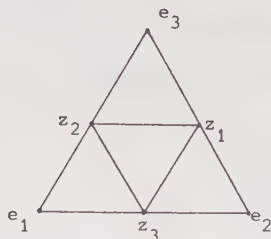
Diese Konvergenzordnung ist bereits optimal, d.h. durch lokale Verfeinerungen kann keine Verbesserung erreicht werden.

Der kleinste Eigenwert von (3) ist bekannt:

$$\lambda_1 = 12 \quad (\text{Walden/Kellogg [77]})$$

Das Beispiel wurde mit zwei Makro-Triangulierungen gerechnet.

Die erste Makro-Triangulierung wurde symmetrisch gewählt:



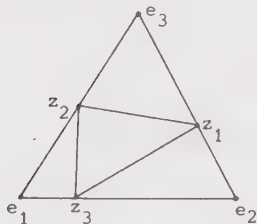
Die Teilpunkte z_i , $i = 1, 2, 3$, seien die Seitenhalbierenden von $S_{1/8}$.

Die Rechnungen ergaben:

n	h	λ_h^1	Konv.ord.
1	1.225	12.386 691	4.46
2	0.598	12.015 830	4.62
3	0.397	12.002 384	4.84
4	0.298	12.000 595	4.85
5	0.239	12.000 204	4.72
6	0.199	12.000 086	4.89
7	0.171	12.000 041	4.20
8	0.149	12.000 023	5.02
9	0.133	12.000 013	

Die Konvergenzordnung wurde dabei für zwei Schrittweiten h_1, h_2 durch den Ausdruck $\ln(e_1/e_2) / \ln(h_1/h_2)$ abgeschätzt, wobei e_1, e_2 die Fehler der Näherungswerte zu h_1, h_2 sind.

Die erhaltenen Konvergenzraten liegen deutlich über dem theoretischen Wert $2\gamma = 4$ gemäß Bemerkung 7.5(a). Da die Vermutung naheliegt, daß dies auf die Symmetrie des Problems und der gewählten Makro-Triangulierung zurückzuführen ist, wurden die Rechnungen mit der folgenden unsymmetrischen Makro-Triangulierung wiederholt:



$$d_s(e_1, z_3) / d_s(z_3, e_2) = 1/3$$

$$d_s(e_2, z_1) / d_s(z_1, e_3) = 2/3$$

$$d_s(e_3, z_2) / d_s(z_2, e_1) = 1$$

Die Rechnungen ergaben:

n	h	λ_h^1	Konv.ord.
1	1.483	12.673 113	3.90
2	0.713	12.038 559	4.19
3	0.468	12.006 612	4.29
4	0.349	12.001 879	4.32
5	0.279	12.000 714	4.23
6	0.232	12.000 327	4.26
7	0.199	12.000 170	4.18
8	0.174	12.000 097	4.30
9	0.155	12.000 059	

Zur Beschreibung des rechnerischen Aufwands geben wir die Anzahl der Elemente n_E , die Dimension d_M des Matrix-Eigenwertproblems, die Länge ℓ_M des Profils der Matrizen und die Rechenzeit T für $n = 5, 9$ an:

n	n_E	d_M	ℓ_M	T (sec)
5	100	135	2622	2.71
9	324	459	16374	12.09

Das Problem (3) wurde auch in Walden/Kellogg [77] näherungsweise gelöst. Als bester Wert wurde 11.977 angegeben. Die Dimension des Matrix-Eigenwertproblems

betrug dabei 144. Da Walden/Kellogg kein konformes Rayleigh-Ritz-Verfahren verwenden, ist die Konvergenz der errechneten Näherungen von oben nicht gewährleistet.

2. Beispiel:

Das Grundgebiet S wird als $3/8$ -Sphäre gewählt:

$$S_{3/8} := \{x \in S^2 \mid x_3 > 0, (x_1 < 0) \vee (x_2 > 0)\}.$$

$S_{3/8}$ entspricht auf der Sphäre dem ausgiebig untersuchten L-Gebiet der Ebene (vgl. Strang/Fix [73], S. 278 ff). Die Aufgabenstellung lautet

$$(4) \quad \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{auf } S_{3/8}, \quad u|_{\partial S_{3/8}} = 0.$$

Der kleinste Eigenwert von (4) stimmt auf Grund der vorliegenden Symmetrie mit dem kleinsten Eigenwert des folgenden Problems überein:

$$(5) \quad \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{auf } S'_{3/8}, \quad u|_{\partial S_D} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial S_N} = 0,$$

wobei

$$S'_{3/8} := \{x \in S^2 \mid x_2 > \max\{0, -x_1\}, x_3 > 0\}$$

$$\partial S_D = \overline{e_1, e_2} \cup \overline{e_1, e_3}, \quad e'_2 := (e_2 - e_1) / \|e_2 - e_1\|$$

$$\partial S_N = \overline{e'_2, e_3}$$

(Für $x, y \in S^2$, $x \neq -y$, sei $\overline{x, y}$ die kürzeste abgeschlossene geodätische Linie von x nach y).

Die Eigenfunktionen von (4) zum kleinsten Eigenwert ergeben sich aus den Eigenfunktionen von (5) zum kleinsten Eigenwert durch Spiegelung an $\overline{e_2', e_3}$.

Für $x \in X_S = \{e_1, e_2', e_3\}$ gilt nach Beispiel 5.4(a):

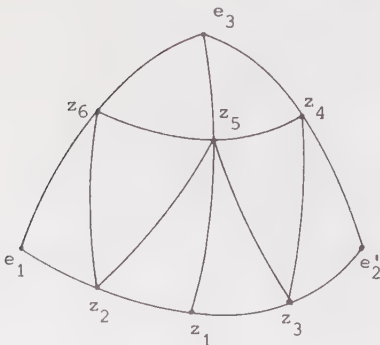
$$\alpha(e_1) = 2 \quad ; \quad \alpha(e_2') = 1 \quad ; \quad \alpha(e_3) = \frac{2}{3} \quad .$$

Es folgt: $\alpha_0 = \frac{2}{3}$.

Im Punkt e_2' liegt keine Singularität der Eigenfunktionen vor, da diese durch Spiegelung an $\overline{e_2', e_3}$ lokal zu Lösungen der Eigenwertgleichung an einem regulären Randpunkt mit Dirichletschen Randbedingungen fortgesetzt werden können. Lokale Verfeinerungen kommen somit nur bei e_3 in Frage. Der kleinste Eigenwert von (4) bzw. (5) ist bekannt :

$$\lambda_1 = 40/9 = 4.444 \ 444 \ \dots \quad (\text{Walden/Kellogg [77]}).$$

Es wurde folgende Makro-Triangulierung verwendet:



$$z_1, z_2, z_3 \in \overline{e_1, e_2'} :$$

$$\frac{d_S(e_1, z_1)}{d_S(z_1, e_2')} = \frac{d_S(e_1, z_2)}{d_S(z_2, z_1)} = \frac{d_S(z_1, z_3)}{d_S(z_3, e_2')} = 1 \quad .$$

$$z_4 \in \overline{e_2', e_3}, z_5 \in \overline{z_1, e_3}, z_6 \in \overline{e_1, e_3} :$$

$$\frac{d_S(e_2', z_4)}{d_S(z_4, e_3)} = \frac{d_S(z_1, z_5)}{d_S(z_5, e_3)} = \frac{d_S(e_1, z_6)}{d_S(z_6, e_3)} = \frac{5}{4} \quad .$$

Für quasi-uniforme Triangulierungen ist nach Bemerkung 7.5(a) die Konvergenzordnung $2\gamma = 2 \min \{ \frac{2}{3}, 2 \} = 4/3$ zu erwarten. Die Rechnungen ergaben:

n	h	λ_h^1	Konv.ord.
1	1.129	4.580 315	1.58
2	0.553	4.488 579	1.36
3	0.366	4.469 670	1.35
4	0.275	4.461 569	1.37
5	0.221	4.457 148	1.33
6	0.184	4.454 402	

Für Triangulierungen, die bei e_3 lokal verfeinert wurden, ergab sich

$$\varepsilon = 3/2 ; \text{ Konvergenzordnung } 2\omega = 2\varepsilon\alpha_0 = 2$$

n	n_s	h	λ_h^1	Konv.ord.
2	3	.553	4.458 706	1.39
3	4	.366	4.451 924	2.84
4	6	.275	4.447 764	

$$\varepsilon = 2 ; \text{ Konvergenzordnung } 2\omega = 2\varepsilon\alpha_0 = 8/3$$

n	n_s	h	λ_h^1	Konv.ord.
2	4	.553	4.449 210	2.90
3	6	.366	4.445 886	2.78
4	8	.275	4.445 095	

$\varepsilon = 3$; Konvergenzordnung $2\omega = 2\varepsilon\alpha_0 = 4$

n	n_s	h	λ_h^1	Konv.ord.
2	6	.553	4.446 359	3.61
3	9	.366	4.444 876	3.23
4	12	.275	4.444 616	

Zur Beschreibung des rechnerischen Aufwands geben wir wieder n_E, d_M, ℓ_M und T für einige Fälle an. Zusätzlich führen wir die Länge $h_{\min}$ der kleinsten Dreiecksseite an.

n	n_s	ε	n_E	d_M	ℓ_M	T (sec)	$h_{\min}$
6	6	1.0	288	432	11 706	9.52	0.098
4	6	1.5	144	218	4 846	3.86	0.048
4	8	2.0	160	244	5 860	5.05	0.011
4	12	3.0	192	296	6 715	6.12	0.0004

3. Beispiel

Das Grundgebiet S sei die $7/8$ -Sphäre:

$$S_{7/8} := S^2 \setminus \{x \in S^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0\}.$$

Die Aufgabenstellung lautet:

$$(6) \quad \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{auf } S_{7/8}, \quad u|_{\partial S_{7/8}} = 0.$$

Es sei $S'_{7/8}$ das Teilgebiet von $S_{7/8}$, das von dem geodätischen Streckenzug $\overline{b_1, b_2} \cup \overline{b_2, b_3} \cup \overline{b_3, b_1}$,

$b_1 := (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, $b_2 := (-1, 0, 0)$, $b_3 := (-1, -1, 0)/\sqrt{2}$,

berandet wird. Sei weiter R_1 die Spiegelung an der

Ebene, die b_1, b_3 und $(0, 0, 0)$ enthält, R_2 die

Spiegelung an der Ebene, die $b_1, -e_2$ und $(0, 0, 0)$

enthält, und R_3 die Spiegelung an der Ebene, die

b_1, b_2 und $(0, 0, 0)$ enthält. Dann gilt:

$$S_{7/8} = (S'_{7/8} \cup R_1(S'_{7/8})) \cup R_2(S'_{7/8} \cup R_1(S'_{7/8}))$$

$$\cup R_3(S'_{7/8} \cup R_1(S'_{7/8}))$$

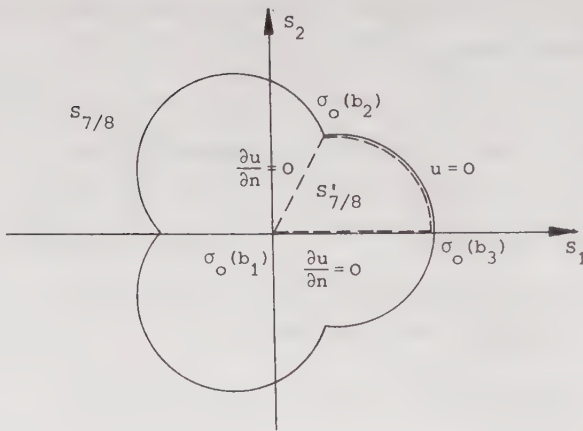
Es folgt, daß der kleinste Eigenwert von (6) mit dem kleinsten Eigenwert des folgenden Problems übereinstimmt.

$$(7) \quad \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{auf} \quad S'_{7/8}, \quad u|_{\partial S_D} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial S_N} = 0,$$

$$\partial S_D := \overline{b_2, b_3},$$

$$\partial S_N := \overline{b_3, b_1} \cup \overline{b_1, b_2}.$$

Von dieser Reduktion des Problems (6) wurde bereits in Fichera [75] Gebrauch gemacht. Sei σ_0 die stereografische Projektion mit Fußpunkt b_1 , die b_3 auf die positive s_1 -Achse abbildet. Die Geometrie des Problems wird durch folgende Skizze in der Parameterebene dargestellt:



Für $x \in X_s = \{b_1, b_2, b_3\}$ gilt nach Beispiel 5.4(a):

$$\alpha(b_1) = 3, \quad \alpha(b_2) = \frac{2}{3}, \quad \alpha(b_3) = 1.$$

Es folgt: $\alpha_0 = \frac{2}{3}$.

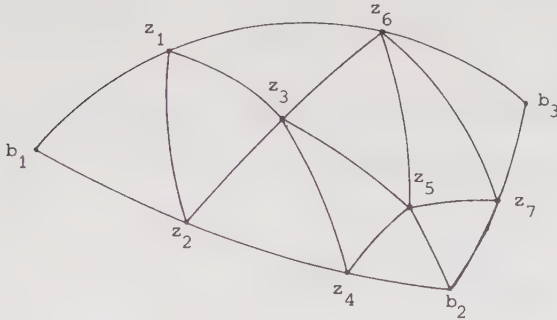
Im Punkt b_3 liegt keine Singularität der Eigenfunktionen vor, da diese durch Spiegelung an $\overline{b_1, b_3}$ lokal zu Lösungen der Eigenwertgleichung an einem regulären Randpunkt fortgesetzt werden können. Lokale Verfeinerungen kommen somit nur bei b_2 in Frage. Man beachte, daß die Singularität bei b_2 von gleicher Art ist wie im zweiten Beispiel.

Der kleinste Eigenwert von (6) bzw. (7) ist nicht bekannt.

Die bisher besten Schranken sind in Fichera [75] angegeben:

$$0.621\ 53 < \lambda_1 < 0.680\ 25.$$

Es wurde folgende Makro-Triangulierung verwendet:



$$z_1 := (0, 0, 1)$$

$$z_6 \in \overline{z_1, b_3} : d_s(z_1, z_6) / d_s(z_6, b_3) = 5/4 ,$$

$$z_7 \in \overline{b_2, b_3} : d_s(b_2, z_7) = d_s(z_7, b_3) ,$$

$$z_4 \in \overline{b_2, b_1} : d_s(b_2, z_4) = d_s(b_2, z_7) ,$$

$$z_2 \in \overline{b_1, z_4} : d_s(b_1, z_2) = d_s(z_2, z_4) ,$$

$$z_5 \in S'_{7/8} : d_s(b_2, z_5) = d_s(b_2, z_7) , \quad d_s(z_4, z_5) = d_s(z_5, z_7)$$

$$z_3 \in \overline{z_2, z_6} : d_s(z_2, z_3) = d_s(z_3, z_6)$$

Für quasi-uniforme Triangulierungen ergab sich $(2\gamma = \frac{4}{3})$:

n	h	λ_h^1
1	1.062	0.669 216
2	.526	0.663 800
3	.349	0.662 396
4	.263	0.661 775
5	.211	0.661 434

Bei b_2 lokal verfeinerte Triangulierungen ergaben:

$\varepsilon = 3/2$; Konvergenzordnung $2\omega = 2\varepsilon\alpha_0 = 2$.

n	n_s	h	λ_h^1
2	3	.526	0.661 462
3	4	.349	0.661 012
4	6	.263	0.660 700

$\varepsilon = 2$; Konvergenzordnung $2\omega = 2\varepsilon\alpha_0 = 4/3$

n	n_s	h	λ_h^1
2	4	.526	0.660 722
3	6	.349	0.660 541
4	8	.263	0.660 492

$\varepsilon = 3$; Konvergenzordnung $2\omega = 2\varepsilon\alpha_0 = 4$

n	n_s	h	λ_h^1
2	5	.526	0.660 520
3	8	.349	0.660 465
4	8	.263	0.660 460

Für $\varepsilon = 3$ konnte die Verfeinerungsvorschrift (1) :

$n_s = [\varepsilon n]$ nicht erfüllt werden, da die Kondition der Matrizen so groß wurde, daß die Cholesky-Zerlegung, die für das verwendete Verfahren zur näherungsweise Lösung des Eigenwertproblems erforderlich war, nicht mehr durchgeführt werden konnte ($\text{cond}(B) > 10^{13}$).

Durch Variieren der Parameter n, n_s, ε wurde versucht, die Ergebnisse zu verbessern:

n	n_s	ε	λ_h^1
4	11	2.5	0.660 457 5
5	12	2.5	0.660 454 5
5	13	2.5	0.660 453 7
5	14	2.5	0.660 453 2
5	15	2.5	0.660 452 8

Man sieht, daß die ersten vier Dezimalstellen sich bereits stabilisiert haben.

Über den rechnerischen Aufwand wird an Beispielen berichtet:

n	n_s	ϵ	n_E	d_M	ℓ_M	T(sec)	$h_{\min}$
5	5	1.0	250	416	12 662	8.12	0.079
4	6	1.5	176	299	7 848	5.32	0.027
4	8	2.0	192	325	8 260	5.68	0.0061
4	8	3.0	192	325	8 260	5.69	0.00077
5	15	2.5	330	546	15 890	10.53	0.00045

4. Beispiel

Die Aufgabenstellung lautet:

$$(8) \quad p_1 (\lambda u_1 + \lambda u_1) = 0 \quad \text{auf} \quad S_{7/8} \quad ,$$

$$p_2 (\lambda u_2 + \lambda u_2) = 0 \quad \text{auf} \quad S_{7/8}^c := S^2 \setminus \bar{S}_{7/8} \quad ,$$

$$u_1|_{\partial S_{7/8}} = u_2|_{\partial S_{7/8}^c} \quad ,$$

$$p_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}|_{\partial S_{7/8}} = p_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}|_{\partial S_{7/8}^c} \quad ,$$

wobei p_1, p_2 vorgegebene positive reelle Zahlen seien.

Es werden die beiden Fälle $(p_1, p_2) = (1, 1.5)$ und

$(p_1, p_2) = (1, 20)$ betrachtet.

Die singulären Exponenten $\alpha(x)$, $x \in X_S = \{-e_1, -e_2, -e_3\}$,

sind nach 5.4(a) Nullstellen transzendenter Gleichungen.

Die numerische Lösung dieser Gleichungen ergibt für

$$\alpha_0 = \min \{ \alpha(x) \mid x \in X_S \} :$$

$$p_2 = 1.5 : |\alpha_0 - 0.936| < 10^{-3}$$

$$p_2 = 20 : |\alpha_0 - 0.701| < 10^{-3}$$

Für den kleinsten Eigenwert von (8) gilt $\lambda_1 = 0$; der kleinste positive Eigenwert ist nicht bekannt.

Als Makro-Triangulierung wurde die Zerlegung der Sphäre in ihre Durchschnitte mit den Oktanten des $\mathbb{R}^3$ gewählt. Die Rechnungen mit quasi-uniformen Triangulierungen ergaben:

n	h	λ_h^2 (p ₂ =1,5)	λ_h^2 (p ₂ =20)
1	2.449	1.877 520	0.934 152
2	1.225	1.798 901	0.890 948
3	0.774	1.796 224	0.874 543
4	0.598	1.795 956	0.864 253
5	0.477	1.795 807	0.857 280

Um feinere Triangulierungen einsetzen zu können, wurde das Grundgebiet unter Verwendung der Symmetrie der Aufgabenstellung (8) analog wie in Beispiel 3 reduziert. Im folgenden werden die Bezeichnungen aus Beispiel 3 verwendet.

Es sei $b_4 := -b_1$ und $S'_{1/8}$ das Teilgebiet von $S^2 \setminus \bar{S}_{7/8}$, das von dem geodätischen Streckenzug $\overline{b_2, b_4} \cup \overline{b_4, b_3} \cup \overline{b_3, b_2}$ berandet wird. Mit analogen Überlegungen wie in Beispiel 3

folgt dann, daß der kleinste positive Eigenwert von (8) gleich dem kleinsten positiven Eigenwert des folgenden Problems ist:

$$(9) \quad p_1 (\Delta u_1 + \lambda u_1) = 0 \quad \text{auf} \quad S'_{7/8} ,$$

$$p_2 (\Delta u_2 + \lambda u_2) = 0 \quad \text{auf} \quad S'_{1/8} ,$$

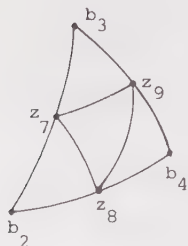
$$u_1|_{\partial S'_{7/8} \cap \partial S'_{1/8}} = u_2|_{\partial S'_{7/8} \cap \partial S'_{1/8}} ,$$

$$p_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} |_{\partial S'_{7/8} \cap \partial S'_{1/8}} = p_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} |_{\partial S'_{7/8} \cap \partial S'_{1/8}} ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} |_{(\partial S'_{7/8} \cup \partial S'_{1/8}) \setminus (\partial S'_{7/8} \cap \partial S'_{1/8})} = 0 .$$

Lokale Verfeinerungen kommen wiederum nur bei b_2 in Frage. Der singuläre Exponent $\alpha(b_2)$ stimmt mit den oben angegebenen Werten von α_0 überein.

Als Makro-Triangulierung wurde die in Beispiel 3 angegebene Makro-Triangulierung von $S'_{7/8}$ gewählt, ergänzt um die folgende Makro-Triangulierung von $S'_{1/8}$:



$$z_8 \in \overline{b_2, b_4} : d_s(b_2, z_8) / d_s(z_8, b_4) = 8/9$$

$$z_9 \in \overline{b_3, b_4} : d_s(b_3, z_9) = d_s(z_9, b_4) .$$

Für quasi-uniforme Triangulierungen ergab sich:

n	h	λ_h^2 ($p_2=1,5$)	λ_h^2 ($p_2=20$)
1	1.062	1.796 343	0.872 167
2	0.526	1.795 420	0.848 821
3	0.349	1.795 207	0.840 701
4	0.263	1.795 102	0.836 636

Um maximale Konvergenzordnung zu erreichen, wurde für $p_2 = 1.5$ der Parameter $\epsilon = 2.1$ gewählt. Für die Konvergenzordnung gilt dann: $2\omega = 2\epsilon\alpha_0 \approx 2 \cdot 2.1 \cdot 0.936 = 3.931$.

n	n_s	h	λ_h^2 ($p_2=1,5$)
2	4	0.526	1.795 336
3	6	0.349	1.795 170
4	8	0.263	1.795 083

Für $p_2 = 20$ wurde $\epsilon = 2.85$ gesetzt. Für die Konvergenzordnung gilt dann: $2\omega = 2\epsilon\alpha_0 \approx 2 \cdot 2.85 \cdot 0.701 = 3.996$.

n	n_s	h	λ_h^2 ($p_2=20$)
2	5	0.526	0.840 162
3	8	0.349	0.835 742
4	10	0.263	0.833 376

LITERATUR

- ADAMS, R.A.: Sobolev Spaces. Academic Press, New York-San Francisco-London (1975).
- BRONSTEIN, I.N., SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Zürich und Frankfurt (1971).
- CIARLET, P.G., RAVIART, P.-A.: Interpolation theory over curved elements, with applications to finite element methods. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1, S. 217-249 (1972).
- CIARLET, P.G.: The finite element method for elliptic problems. North-Holland Publishing Company, Amsterdam · New York · Oxford (1978).
- ERWE, F.: Differential- und Integralrechnung I. Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich (1962).
- FICHERA, G.: Asymptotic behavior of the electric field and density of the electric charge in the neighbourhood of singular points of a conducting surface. Russian Math. Surveys 30, S. 107-127 (1975).
- FICHERA, G.: Singularities of 3-dimensional potential functions at the vertices and at the edges of the boundary. In: Lecture Notes in Math. No 827, S. 107-114 (1978).
- FIX, G.J.: Eigenvalue Approximation by the Finite Element Method. Advances in Math. 10, S. 300-316 (1973).
- GRISVARD, P.: Alternative de Fredholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. IV, 2, S. 359-388 (1975).
- GRISVARD, P.: Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain. In: Numerical Solution of Partial Differential

- Equations III (Ed.: B. Hubbard), S. 207-274. Academic Press, New York (1976).
- GRÖBNER, W., HOFREITER, N. (Hrsg.): Integraltafel. I. Teil, 2., verb. Aufl. Springer-Verlag, Wien und Innsbruck (1957).
- KELLOGG, R.B.: Singularities in interface problems.
In: Numerical Solution of Partial Differential Equations II (Ed.: B. Hubbard), S. 351-400. Academic Press, New York (1971).
- KELLOGG, R.B.: Higher Order Singularities for Interface Problems. In: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations (Ed.: A.K. AZIZ), S. 589-602. Academic Press, New York and London (1972).
- KELLOGG, R. B.: On the Poisson Equation with Intersecting Interfaces. *Applicable Analysis* 4, S. 101-129 (1975).
- KLINGENBERG, W.: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, HTB 107 (1973).
- KREYSZIG, E.: Differentialgeometrie. AVG Geest & Portig K.-G., Leipzig (1957).
- LADYŽENSKAJA, O.A., URAL'TSEVA, N.N.: Linear and Quasilinear Elliptic Equations. Academic Press, New York and London (1968).
- LEHMAN, R. S.: Developments at an Analytic Corner of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations. *J. Math. Mech.* 8, S. 727-760 (1959).
- LEMARÉ, K.: Régularité de la solution d'un problème de transmission. *J. Math. pures et appl.* 56, S. 1-38 (1977).

- LIONS, J.L., MAGENES, E.: Non-homogeneous boundary value problems and applications I. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972).
- NECAS, J.: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson et Cie., Paris (1967).
- SCHATZ, A.H., WAHLBIN, L.B.: Maximum Norm Estimates in the Finite Element Method on Plane Polygonal Domains, Part 2, Refinements. Math. Comp. 33, S. 465-492 (1979).
- SCHWARZ, H.R.: Methode der finiten Elemente. B.G. Teubner, Stuttgart (1980).
- STEPHAN, E., WHITEMAN, J.R.: Singularities of the Laplacian at corners and edges of three dimensional domains and their treatment with finite element methods. Brunel University, Institute of Computational Mathematics, Bicom 81/1 (1981).
- STRANG, G., FIX, G.J.: An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1973).
- STUMMEL, F.: Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. Lecture Notes in Mathematics No. 102, Springer-Verlag, Berlin • Heidelberg • New York (1969).
- VAINIKKO, G.M.: On the speed of convergence of approximate methods in the eigenvalue problem. USSR Comput. Math. and Math. Phys. 7, S. 18-32 (1967).
- VAINIKKO, G.M.: On the rate of convergence of certain approximation methods of Galerkin type in an eigenvalue problem. Amer. Math. Soc. Transl. 86, S. 249-259 (1970).
- VEIDINGER, L.: On the order of convergence of the Rayleigh-Ritz-method with piecewise linear trial functions. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 23, S. 507-517 (1972).

- VEIDINGER, L.: On the order of convergence of a finite element scheme. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 25, S. 401-412 (1974).
- WALDEN, H., KELLOGG, R.B.: Numerical determination of the fundamental eigenvalue for the Laplace operator on a spherical domain. J. Eng. Math. 11, S. 299-318 (1977).
- WIGLEY, N.M.: Asymptotic Expansions at a Corner of Solutions of Mixed Boundary Value Problems. J. Math. Mech. 13, S. 549-576 (1964).
- WLOKA, J.: Partielle Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart (1982).

LEBENS LAUF

Karl Steger	geboren am 3.8.1952 in Regensburg
Schulbildung	1958-1962 Volksschule 1962-1971 Gymnasium, mathematisch-naturwissenschaftlicher Zweig 1971 Abitur am Röntgen-Gymnasium, Würzburg
Wehr-/Zivildienst	Juli 1971 - Oktober 1971 Wehrdienst Oktober 1971 - November 1972 Zivildienst
Studium	1972-1977 Studium der Mathematik und Physik an der Technischen Universität München 1977 Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien 1977-1980 Studium der Mathematik und Informatik an der Ludwig-Maximilians-Universität in München 1980 Diplomprüfung in Mathematik
Tätigkeit	1980-1981 wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Informatik der Universität München 1981-1983 wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität München.

